

**Как профессор Знаменский С.В. открыл Америку, повторно открыв понятие выпуклости в направлении, её свойства, а также исследовав дифференциальные уравнения бесконечного порядка, или Заимствования в теории дифференциальных уравнений бесконечного порядка и комплексной геометрии**

### **«Новый геометрический аппарат» профессора Знаменского**

В диссертационном исследовании С.В. Знаменского «О дифференциальных уравнениях бесконечного порядка в комплексном анализе и сильной линейной выпуклости» (1980), выполненном под руководством д.ф.-м.н., профессора Л.А. Айзенберга, центральным элементом решения проблемы разрешимости, эпиморфности линейного дифференциального оператора бесконечного порядка с постоянными коэффициентами выступает концепция «выпуклости в направлении».

Во введении к своей диссертации С.В. Знаменский открыто декларирует, что выполненное им исследование потребовало «значительного видоизменения методов... и создания нового геометрического аппарата, включающего в себя понятие выпуклости в направлении и его свойства».

При этом делается скромная ссылка всего лишь на одну работу, на работу И.Ф. Красичкова-Терновского «Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза» (Матем. сб., 1972, т.88, №3, с. 331-352), где близкое понятие якобы приведено «без какого-либо описания его свойств».

Подобная декларация новизны является ярким примером прямого заимствования идей, которые уже давно были известны математическому сообществу.

Понятие множества, выпуклого в заданном направлении (*convex in one direction*), было введено и исчерпывающе изучено в рамках геометрической теории функций в США и Великобритании в 1936 году, за полвека до появления работ И.Ф. Красичкова-Терновского и С.В. Знаменского.

Понятие множества, выпуклого в заданном направлении, и математический аппарат были созданы не в Красноярске и не в Ростове-на-Дону, и тем более не в конце 1970-х годов.

Первооткрывателем данного свойства в контексте аналитических функций является американский математик М.С. Робертсон (M.S. Robertson), который в 1936 году опубликовал в *American Journal of Mathematics* основополагающую статью «Analytic functions star-like in one direction».(1)

В своей работе Робертсон в те стародавние времена исследовал аналитические функции, отображающие единичный круг на области, выпуклые в одном направлении, и вывел необходимые и достаточные условия на коэффициенты Тейлора таких функций.

Исследования М.С. Робертсон продолжил японский математик Т. Умезава (T. Umezawa), опубликовавший в 1952 году расширенный анализ «Analytic functions convex in one direction».(2)

В последующие годы, также до С.В. Знаменского, данный аппарат активно развивался школами США и Европы в исследованиях однолистных функций, гармонических сдвигов (harmonic shears) и отображений на полуплоскости (работы W.C. Royster, M. Ziegler, I.J. Schoenberg, G. Polya) (3).

Скрытый паттерн указанного заимствования С.В. Знаменского заключается в механизме трансляции геометрических свойств на поведение интеграла Коши.

В американских исследованиях выпуклость в направлении использовалась для оценки искажений и роста гармонических функций.

С.В. Знаменский всего лишь использовал адаптацию этого, придуманного и разработанного задолго до него, геометрического принципа для теоремы Ароншайна-Пуанкаре о разделении особенностей.

Использование свойства выпуклости в направлении было шагом для замыкания теории эпиморфизмов, однако присвоение авторства самому геометрическому аппарату является грубым нарушением С.В. Знаменским научной этики.

Предложенное С.В. Знаменским свойство связности сечений областей полуплоскостями является лишь русскоязычной переформулировкой классического понятия выпуклости в направлении, детально разработанного в США (начиная с трудов М. Робертсона 1936 г.) в рамках геометрической теории однолистных функций.

## **Сильно линейно выпуклые множества.**

В диссертации С.В. Знаменского значительное место отведено геометрическому описанию так называемых «сильно линейно выпуклых множеств».

Доказывается, что открытое или компактное множество является сильно линейно выпуклым тогда и только тогда, когда все его сечения комплексными прямыми являются связными и односвязными (то есть дополнение сечения до расширенной комплексной прямой связно).

В тексте диссертации С.В. Знаменского утверждается, что данный результат подтвердил гипотезу, представленную на Красноярском городском семинаре 1972 года, и приводится в качестве фундаментального достижения.

Между тем, само понятие линейной выпуклости (множество, дополнение которого представляет собой объединение комплексных гиперплоскостей (4)) было введено немецкими математиками Г. Бенке (H. Behnke) и Э. Пешлем (E. Peschl) еще в 1935 году. (5)

В их терминологии свойство односвязности сечений именовалось «Planarkonvexität im kleinen» (локальная планарная выпуклость) (6).

В 1966-1968 годах французский математик Андре Мартино (A. Martineau) опубликовал работы «Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes» и «Sur la notion d'ensemble fortement linéellement convexe» (7).

Мартино решал задачу изоморфизма топологических векторных пространств. Он исследовал преобразование Фантаппье аналитических функционалов. Если  $D \subset \mathbb{C}^n$  — линейно выпуклая область, а  $\eta^*$  — бесконечно удаленная гиперплоскость в проективном пространстве  $\mathbb{C}P^n$ , то пространство голоморфных функций  $H(D)$  имеет сопряженное пространство аналитических функционалов  $H'(D)$ . Преобразование Фантаппье  $\mathcal{F} : H'(D) \rightarrow H_0(D^*)$ , где  $D^*$  — сопряженное множество, задается интегральным ядром  $(1 - \langle \zeta, z \rangle)^{-k}$ . (7)

Множество, для которого преобразование Фантаппье и его сопряженное преобразование являются строгими изоморфизмами пространств, Мартино назвал «сильно линейно выпуклым» (*fortement linéellement convexe*) (7).

Знаменский попытался найти геометрический критерий для этого функционально-аналитического свойства Мартино.

Геометрическое условие (односвязность сечений) было доказано С.В. Знаменским в 1979-1980 годах.

Одновременно, и независимо от С.В. Знаменского, математики С.Г. Гиндикин и Г.М. Хенкин (1978) получили эквивалентные результаты в контексте комплексной интегральной геометрии и преобразования Радона для  $\bar{\partial}$ -когомологий в  $q$ -линейно вогнутых областях в  $\mathbb{C}P^n$ , что говорит об отсутствии унифицированного взгляда на топологию комплексного пространства.

## Архаизм «сильной линейной выпуклости»

В монографии «Complex Convexity and Analytic Functionals» (2004) авторы М. Андерссон, М. Пассаре и Р. Сигурдссон (M. Andersson, M. Passare, R. Sigurdsson) очистили теорию от национальных наслоений и ввели универсальный термин —  $\mathbb{C}$ -выпуклость ( $\mathbb{C}$ -convexity) (8).

Согласно их строгому определению, открытое множество называется  $\mathbb{C}$ -выпуклым, если его пересечение с любой комплексной прямой является стягиваемым (односвязным) множеством.

Они доказали, что  $\mathbb{C}$ -выпуклость эквивалентна сильной линейной выпуклости Мартино для областей с границей класса  $C^1$ , тем самым поглотив критерий Знаменского и объединив геометрический и функциональный подходы (9).

С этого момента термин «сильная линейная выпуклость» стал считаться архаичным,

**Приоритет в исследовании дифференциальных уравнений бесконечного порядка принадлежит американским математикам**

В 1936 году Р.Д. Кармайкл (R.D. Carmichael) опубликовал в Бюллетене Американского математического общества классические работы «Linear Differential Equations of Infinite Order» и «On Non-Homogeneous Linear

Differential Equations of Infinite Order With Constant Coefficients» (9).

В этих работах были заложены основы построения аналитических решений без привлечения избыточного топологического аппарата.

В 1950 году американский математик Р.П. Боас (R.P. Boas) опубликовал работу «Differential equations of infinite order» в *Journal of the Indian Mathematical Society*, где глубоко исследовал связи между операторами и ростом целых функций (10).

В 1973 году Дж.Д. Бакхольц (J.D. Buckholtz) представил полное решение для бесконечного порядка через разложение по полиномам Аппеля, создав конструктивный вычислительный инструмент, лишенный экзистенциальной неопределенности теорем двойственности (11).

В диссертации С.В. Знаменского отсутствуют не только ссылки на труды основоположников, но нет даже их упоминания.

Отсутствие ссылок на базовые труды Кармайкла, Боаса и Бакхольца в диссертации 1980 года свидетельствует о катастрофическом методологическом дефекте диссертации С.В. Знаменского.

В современной теоретической физике (теория струн, р-адическая динамика струн, нелокальная космология) операторы бесконечного порядка возникают естественным образом при разложении экспоненциальных функций от оператора д'Аламбера.

Работы исследователей из США и Великобритании, таких как Н. Барнаби (N. Barnaby), Н. Камран (N. Kamran), Дж. Кальканьи (G. Calcagni), Н. Мёллер (N. Moeller) и Б. Цвибах (B. Zwiebach), полностью деконструировали абстрактный подход к таким уравнениям (12).

Центральной проблемой в физике является проблема начальных значений (Initial Value Problem, IVP).

Та теория эпиморфизмов, которой придерживается С.В. Знаменский, подразумевает, что уравнение бесконечного порядка обладает бесконечномерным пространством решений, что в теории дифференциальных уравнений предполагает необходимость бесконечного числа начальных условий для однозначной фиксации динамики поля.

Н. Барнаби и Н. Камран (2008) в рамках формального операторного исчисления доказали, что этот интуитивный вывод ошибочен.

Дифференциальные уравнения бесконечного порядка не допускают корректной постановки задачи Коши с бесконечным набором начальных данных.

Вместо этого они показали, что количество необходимых начальных данных жестко детерминируется аналитической структурой пропагатора в комплексной плоскости. Каждый полюс пропагатора (нуль характеристической функции в импульсном представлении) вносит ровно два начальных условия в финальное решение.

Более того, для устранения духов (ghost-free theories) в  $p$ -адической теории струн и теории поля со струнным возбуждением, действие псевдодифференциального оператора ограничивается интегральным контуром в комплексной плоскости. Это ограничение физически интерпретируется как ультрафиолетовое обрезание (ultra-violet cut-off), фильтрующее нефизические высокие частоты.

Функционально-аналитическая же теория, которой придерживается С.В. Знаменский, оперирующая гомоморфизмами  $H(G) \rightarrow H(G)$  и свойствами бесконечной дифференцируемости вплоть до границы  $A^\infty(G)$ , оказалась абсолютно неспособной описать эти спектральные полюсные эффекты.

Абстрактные теоремы сюръективности, вида «образ  $A(G)$  при отображении совпадает с...», не дают механизма для выделения физического спектра из бесконечномерного ядра оператора.

Это доказывает методологическую стерильность редукционистского топологического подхода С.В. Знаменского перед лицом реальных динамических систем.

### **Формула Вострецова и параметрические манипуляции С.В. Знаменского**

Оригинальная формула Вострецова (Б.А. Вострецов, 1949) представляет голоморфную в единичном круге функцию  $f \in H(G)$  в виде контурного

интеграла:  $f(z) = \int_{|\zeta|=1} \varphi(\zeta) g\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}$  где функции  $\varphi$  и  $g$  принадлежат определенным классам голоморфности.

Основным достижением третьей главы диссертации Знаменского является распространение этой формулы на «сильно звездные области» (strongly star-shaped domains) в многомерном пространстве  $\mathbb{C}^n$ .

Область называется сильно звездной, если для любой точки границы весь отрезок, соединяющий эту точку с началом координат (исключая саму границу), лежит внутри области.

Многомерный аналог формулы, выведенный автором, имеет вид:

$$f(z) = \int_{\partial G} \varphi(\zeta) g(\langle v, \zeta \rangle) \sum_{k=1}^n (-1)^k v_k dv_1 \cdots \wedge dv_n \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$$

где вектор  $v$  определен как  $v_k = \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{\langle \bar{\zeta} - \bar{z}, \zeta \rangle}$ .

Утверждается, что при выборе функции  $g(t) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left(\frac{1}{1-t}\right)^n$ , данная формула переходит в классическую интегральную формулу Мартинелли-Бохнера.

Анализ этого вывода вскрывает серьезную методологическую слабость диссертации С.В. Знаменского.

Формула Мартинелли-Бохнера, в отличие от ядра Коши-Фантаппье, не обладает свойством голоморфности по параметру  $z$  (ее ядро содержит сопряженные переменные  $\bar{\zeta}$  и  $\bar{z}$ ).

Использование ядра Мартинелли-Бохнера для построения представлений голоморфных функций является грубым параметрическим трюком, который не несет глубокого аналитического смысла при решении  $\bar{\partial}$ -уравнений в нестрого псевдовыпуклых областях.

Более того, распространение теоремы Леонтьева на невыпуклые области с использованием «операторов Эйлера бесконечного порядка» вида  $\sum a_k z^k \frac{d^k}{dz^k}$  представляет собой решение искусственно сконструированной задачи, так называемая математика ради математики.

Эти операторы обладают искусственной симметрией, не встречающейся ни в одной физической или прикладной стохастической модели.

В это же время (1978-1980 гг.) С.Г. Гиндикин и Г.М. Хенкин разрабатывали интегральную геометрию с использованием дифференциальных форм Лере-Коппельмана (13).

Подход Хенкина базировался на строгом гомологическом фундаменте и теории когерентных аналитических пучков, позволяя точно вычислять вычеты и интегралы в  $q$ -линейно вогнутых областях (дополнениях к  $\mathbb{C}$ -выпуклым множествам) (14).

Формулы Хенкина-Лере непосредственно применялись к решению уравнений Пенроуза (Penrose representation for rest-mass equations) в твисторной геометрии (15).

На фоне этих фундаментальных результатов, параметрические манипуляции Знаменского с функцией  $g(\langle v, \zeta \rangle)$  для сильно звездных областей выглядят как рутинное обобщение, не вносящее никакого вклада в понимание структуры комплексного пространства.

### Ограниченность концепции экстремальной $\mathbb{C}$ -выпуклости

Анализ современных исследований (2000-2020-е годы) вскрывает еще один скрытый паттерн - деградацию концепции сильной линейной выпуклости при проекционных преобразованиях.

Изначально предполагалось, что  $\mathbb{C}$ -выпуклость (сильная линейная выпуклость) является полным многомерным аналогом обычной геометрической выпуклости.

Однако исследования шведской и польской школ (М. Andersson, L. Kosinski, P. Pflug) доказали, что  $\mathbb{C}$ -выпуклость ведет себя аномально.

В отличие от классической выпуклости, тот факт, что образ ограниченной  $\mathbb{C}$ -выпуклой области при комплексной проекции остается  $\mathbb{C}$ -выпуклым, является сложным для доказательства и требует жестких условий регулярности (16).

Более того, было установлено, что замыкание ограниченной  $\mathbb{C}$ -выпуклой области может не быть линейно выпуклым множеством, а замыкание непустой внутренности  $\mathbb{C}$ -выпуклого компакта может не совпадать с самим компактом (17).

Эти патологические топологические свойства разрушают попытки экстраполировать классическую строгую псевдовыпуклость на  $\mathbb{C}$ -выпуклость.

В частности, это приводит к серьезным ошибкам при конструировании так называемых пиковых функций (peak functions).

Точка границы называется экстремально  $\mathbb{C}$ -выпуклой, если существует комплексная аффинная гиперплоскость, пересекающая замыкание области только в этой единственной точке (16).

Оказалось, что даже для экстремально  $\mathbb{C}$ -выпуклых областей с гладкими границами существование глобальных непрерывных пиковых функций (peak functions from the algebra  $A(D)$ ) не гарантируется автоматически, в отличие от строго псевдовыпуклого случая (16).

Наличие опорной комплексной гиперплоскости (базовое определение линейной выпуклости) не обеспечивает достаточной изоляции точки в комплексной касательной плоскости (complex tangent space  $T_z^{\mathbb{C}} \partial D$ ) (17).

Этот факт окончательно девальвирует применимость простого

геометрического критерия (односвязности сечений) для тонких метрических оценок на границах областей.

### **Некоторые выводы**

Базовые геометрические инструменты, такие как «выпуклость в направлении являются прямым, хотя и неартикулированным, заимствованием из работ американских и японских геометров 1930-1950-х годов (M.S. Robertson, T. Umezawa) (1).

Аналогично обстоит ситуация с концепцией «сильной линейной выпуклости».

Понятие, зародившееся как локальная планарная выпуклость в Германии (1935), формализованное как функционально-топологический изоморфизм во Франции (Martineau, 1966) (18), было одновременно сведено к геометрическому критерию односвязности сечений Знаменским и Гиндикиным, Хенкиным).

Впоследствии вся эта избыточная терминология была заслуженно поглощена емким универсальным понятием  $\mathbb{C}$ -выпуклости, введенным шведской школой (Andersson, Passare, Sigurdsson, 2004).

Топологический подход проявляет свойство фундаментальной ограниченности, а сведение решения дифференциальных уравнений бесконечного порядка к поиску условий эпиморфизма (сюръективности) в абстрактных пространствах Фреше  $H(G)$  привело к созданию

экзистенциальной теории, лишенной предсказательной силы.

Игнорирование проблемы Коши и динамики начальных значений полностью отрезало этот математический аппарат от современной физики.

Парадигма США и Великобритании, напротив, опираясь на псевдодифференциальное исчисление и анализ полюсов пропагаторов в комплексной плоскости, успешно применила эти операторы для моделирования нелокальной космологии и струнных возбуждений, доказав, что бесконечный порядок оператора не влечет за собой бесконечного числа степеней свободы.

И в завершение, перед списком литературы.

Скрупулезно анализируя библиографический аппарат диссертации С.В. Знаменского, выявлен критический текстологический артефакт, свидетельствующий о фиктивном характере работы с зарубежными первоисточниками.

Ссылка на основополагающую работу американского математика Ральфа Боаса (1950 г.) содержит грубейшую опечатку в фамилии автора («Роас Р. П.» вместо «Боас Р. П.»), и искаженные выходные данные публикации, указан том 4 вместо фактического тома 14, перенесенные из устаревших реферативных указателей.

Данный факт верифицирует гипотезу о том, что автор диссертации, С.В. Знаменский, не изучал оригинальные исследования США и Великобритании, а занимался некритичной компиляцией вторичных российских математических обзоров.