0

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им.М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

НЕПЕЙВОДА Н.Н.

ПРЕДИКАТИВНЫЕ ТЕОРИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ПРАВИЛОМ СВЕРТКИ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
член-корреспондент АН СССР А.А.Марков
доцент А.Г.Драгалин

Москва - 1973

В В Е Д Е Н И Е

При построении математики на основе теории множеств,как известно,выявились большие затруднения,связанные с отсутствием реальной субстанции под понятием множества как исходным понятием.

В частности,из-за этого происходит следующее:

а) В классической математике множества могут быть охарактеризованы лишь аксиоматически.Принципиальный недостаток этого подхода выявлен теоремой Гёделя о неполноте.

Существенность ограничений,наложенных этой теоремой,выявили последние исследования,начало которым положила знаменитая работа Коэна о независимости континуум-проблемы.

б) В теории множеств доказывается существование множеств-"призраков",которые не могут быть никаким образом однозначно охарактеризованы (например,неизмеримое множество действительных чисел).

в) Иногда в теории множеств получаются прямо противоречащие здравому смыслу результаты,как,например,теорема о разрезании сферы,утверждающая,что сферу можно разрезать на четыре части,из которых конгруэнтными преобразованиями можно образовать две сферы ого же диаметра.

г) Самый существенный недостаток употребления понятия множества как исходного состоит в том,что оно существенно неэффективно,то есть при построении классической математики не делается никакого различия между объектами,описывающими процесс построения, теми,которые принципиально не могут задавать такой процесс.

Тем не менее появление теории множеств подняло математику на новый,гораздо более высокий,уровень абстрактности,обогатило е красивыми методами и концепциями,которые существенно расширили область приложений математики.

В связи с этим при построении эффективной математики возника-
т задача сохранения как можно большей части классической теории,
,в частности,выяснения того,насколько далеко можно развивать
еорию множеств "конструктивными" методами.

От множеств,используемых в эффективной математике и теории,
спользующей множества,необходимо потребовать следующее:

I. Все множества,появляющиеся в нашей теории,должны быть
пределимы её формулой.То есть,если M - множество,мы должны
остроить такую формулу A, что $n \in M$ истинно (ложно) тогда
только тогда,когда истинно (ложно) $A(n)$.

2. Смысл формул в нашей теории должен сводиться,в конце кон-
ов,к смыслу предложений $\mathfrak{A} \llcorner P \lrcorner \doteq Q$ ($\mathfrak{A}$ - алгорифм, P и Q -
лова в некотором алфавите).Сведение должно быть осуществлено при
омощи возможно более простых средств (интуиция всеобщности,поня-
ие осуществимости).

3. Для достаточно простых множеств должна сохраняться обычная
огика.

Это последнее требование связано с тем,что мы не желаем с
амого начала ограничиваться каким-либо кругом множеств,явно
довлетворяющих второму пункту (например,разветвлённым анализом
остаточно низкой ступени [1]). Наша задача - рассмотреть как
жно более широкий класс способов построения множеств и выделить
утверждения,которые могут быть осмыслены с учетом требований
нкта 2.

В данной работе исследуются возможности одного из способов
онструктивного" и предикативного введения множеств.Он характе-
н тем,что используется язык,допускающий много методов определе-
я множеств,в том числе и те,которые привели к антиномиям в кан-
ровской теории множеств.Однако антиномии не возникают из-за того,
о смысл формул определяется поступенчато,исходя из смысла эле-

ментарных формул. Формулы, выражающие известные логические парадоксы, остаются неинтерпретируемыми.

При создании этой работы имелись в виду следующие три проблемы:

I. Проблема выяснения природы парадоксов теории множеств и их разрешения.

Отличие подхода, использованного здесь, от обычного только что охарактеризовано. С этой стороны идеи и методы данной работы весьма тесно связаны с идеями и методами работ Аккермана и Шютте по так называемой "теории множеств Аккермана".

В частности, полуформальная система главы 2 весьма близка к полуформальной системе для теории множеств Аккермана, приведённой в [2]. Логика языка Δ оказывается той же, что и логика теории множеств Аккермана.

С точки зрения получающейся логики можно ещё заметить, что металогика нашей теории совпадает с логикой Бочвара [3].

2. Проблема истолкования арифметических формул.

При истолковании арифметических формул по Лоренцену [4] и А.А. Маркову [5] формула истолковывается как утверждение о выводимости в некоторой полуформальной системе (т.е. системе с конструктивными правилами Карнапа). Однако при таком истолковании кажется, что при определении вывода в полуформальной системе используется либо содержательная импликация, либо модальность. Поэтому возникает задача истолкования понятия полуформального вывода при помощи одной лишь интуиции всеобщности.

3. Проблема построения семантики теорий второго порядка, таких, как разветвлённый анализ, согласованной с тезисом Чёрча.

Работа состоит из четырех частей. В первой части изучается опорный язык Π. В нём имеется лишь один логический символ $- \forall$.

ля понимания формул языка Π из логических средств играет сущест-енную роль лишь интуиция всеобщности.

Теоремы, доказываемые в первой части, устанавливают, что язык, ис-ользующий столь скромные, на первый взгляд, средства, довольно выра-ителен. В нём выразимо понятие применимости алгорифма к слову (в ычном арифметическом языке уже для этого понятия необходимо исполь-овать квантор $\exists$), запирания универсального дерева кортежей при-итивно-рекурсивной функцией, вывода в теории с конструктивными ω - правилами. Уже этим оправдывается (в смысле, изложенном выше), именение теории с конструктивными правилами Карнапа для истолко-ания импликации.

Во второй части работы рассматривается язык Δ, использующий омимо квантора всеобщности ещё и импликацию. Формулы в этом языке зляются естественным обобщением понятия нормальных формул конструк-ивной арифметики [6] . Рассматривается понятие реализуемости ормул языка Δ, строится полуформальная система, адекватно ото-ажающая это понятие.

Основной результат этой главы звучит так:

Для каждой формулы A языка Δ можно построить формулу B ыка Π, такую, что A истинно тогда и только тогда, когда истин-B.

Этот результат показывает, что формулы языка Δ могут быть едены по истинности к формулам, не использующим понятие импликации. от результат выявляет силу и фундаментальную роль в математике туиции всеобщности, которой оказывается достаточно для понимания ех таких формул, для которых конструктивная логика совпадает с ассической.

В главе 3. рассматриваются вопросы о сводимости формул языка охранением как истинности, так и ложности. При сведении формул языка Δ по истинности к формулам языка Π мы получаем формулы, которые не могут быть ложными; они могут быть лишь истинными или бессмысленными.

Оказывается, что свести формулы языка Δ к формулам какого-либо существенно более простого вида с сохранением как истинности, так и ложности, невозможно.

В главе 3 даётся понятие формулы с ограниченным (конструктивным ординалом) числом перемен кванторов, являющееся естественным обобщением обычного арифметического понятия предварённой формулы, доказывается, что всякая формула языка Δ может быть приведена к предварённой нормальной форме, но существуют такие формулы, у которых число кванторов в предварённой нормальной форме не может быть ограничено никаким конструктивным ординалом.

На основе понятия формулы с ограниченным числом перемен кванторов строится классификация формул языка Δ, являющаяся естественным расширением арифметической иерархии Клини-Мостовского. Доказывается, что если существует всегда осмысленная формула с α переменами кванторов, которая "отделяет" области истинности и ложности формулы A, (эта формула истинная (ложная) всегда, когда истинна (соответственно, ложна) A), то A может быть приведена к предварённой нормальной форме с α переменами кванторов, и обратно, если A может быть приведена к предварённой нормальной форме с α переменами кванторов, то существует всегда осмысленная формула B, имеющая α перемен кванторов и разделяющая области истинности и ложности формулы A.

Прослеживается тесная связь между языком Δ и разветвлённым анализом. А именно, для всякой всюду осмысленной формулы языка A, имеющей $\omega\alpha\oplus n$ перемен кванторов, можно построить формулу разветвлённого анализа с α порядками, имеющую в предварённой нормальной форме n перемен кванторов по порядку α. слев?

Иерархия формул языка Δ очень тесно связана с иерархией степеней неразрешимости Клини.

В четвёртой части работы рассматривается язык Ω, обладающий всеми логическими связками. Даётся определение реализуемости формул языка Ω и их конструктивной расшифровки. Ввиду того, что материал, изложенный в этой главе, слабо связан с основными результатами работы и преследует лишь цель показать возможное направление дальнейших исследований, изложение в этой главе очень краткое, доказательства не приводятся.

Результаты частей I,2,3 опубликованы в работах [I6] - [I9].

ЧАСТЬ I.

В этой части работы рассматривается язык, использующий лишь фундаментальнейшее логическое средство - интуицию всеобщности.

Интуиция всеобщности может быть представлена следующим образом:

Мы сумели доказать $A(0), A(1), A(2) \ldots$ и нашли такой метод, который даёт нам возможность по любому предъявленному нам n найти доказательство $A(n)$. Тогда мы говорим, что при всяком n верно $A(n)$. То есть, нам предъявлен такой метод, что проверка его в некоторых конкретных случаях даёт нам уверенность в том, что и в любом другом случае этот метод приведёт к желаемому результату.

Например, пусть у нас есть доказательство $A(0)$ и метод преобразования доказательства $A(n)$ в доказательство $A(n+1)$.

Тогда из имеющегося доказательства $A(0)$ мы при помощи этого метода имеем возможность образовать доказательство $A(1)$.

Из получившегося доказательства $A(1)$ мы имеем возможность образовать доказательство $A(2)$.

Из получившегося доказательства $A(2)$ мы имеем возможность образовать доказательство $A(3)$.

....

Таким образом, мы приобретаем уверенность, что, какое бы ни было у нас натуральное число n, мы всегда сможем шаг за шагом построить доказательство $A(n)$, и заключаем, что при всех n верно $A(n)$.

Задание какого-то фиксированного множества способов доказательства универсальных высказываний немедленно повлекло бы за собой превращение всех рассматриваемых здесь и далее систем в формальные исчисления, подобные тем, например, которые рассматриваются в статье Фефермана [7]. Однако в связи с нашей основной целью - выяснением принципиальных возможностей того или иного юдхода - мы не будем этого делать,и сформулируем все встречающиэся системы как "становящиеся",то есть не ограниченные рамками звестных в данное время способов рассуждения,а допускающие неедленное включение в себя новых методов доказательства универ-альных высказывываний без всякого изменения своей структуры.

I.I. СИНТАКСИС .

Знаки,используемые в языке Π ,следующие:

$$(\;) \; < \; > \; , \; 0 \; | \; н \; = \; \forall \; \in \; \text{q}$$

Объекты языка Π - слова в этом алфавите.Мы будем различать ять видов объектов: переменные,натуральные числа,термы,формулы предикаторы.

Натуральные числа - слова вида 0 , $0|$, $0||$, ...
Мы их будем обозначать 0,I,2,3 ...).

Переменные - слова вида $(н)$, $(нн)$, $(ннн)$, ...
их мы обозначаем соответственно x , y , z ...).

Для обозначения произвольной переменной мы будем употреблять ольшие латинские буквы из конца алфавита: X, Y, Z, U ...

эрмы:

I. Натуральные числа - термы.

2. Переменные - термы.

3. Если n и m - натуральные числа, t_1 , ... t_n - термы,
, $<m,n>(t_1, \ldots, t_n)$ - терм.

Содержательно термы третьего вида обозначают результат применея n - местной вычислимой функции с номером m к термам t_1, . t_n .

рмулы:

I. Если t и u - термы, то $(t=u)$ - формула.

(такие формулы будем называть элементарными).

2. Если A - формула, X - переменная, то $\forall X A$ - формула.

3. Если A - формула, t - терм, X - переменная, то $(t \in 9 X A)$ - формула.

4. Если t и u - термы, то $(t \in u)$ - формула.

Формула $(t \in 9 X A)$ читается " t из предикатора таких X, что A ".

<u>Предикаторы</u>.

Если A - формула, X - переменная, то $9 X A$ - предикатор.

Формула $(t \in u)$ читается " t из предикатора с номером u ".

В интерпретации наших теорий предикаторы играют роль множеств, но ввиду особенностей, указанных во введении, таких, как бессмысленность формулы $(t \in M)$ при некоторых t и M, и т.д., естественно употреблять другой термин.

<u>Параметры формулы A</u>.

Все переменные, входящие в элементарную формулу, являются параметрами этой формулы.

Все переменные, входящие в формулу вида $(t \in u)$, являются параметрами этой формулы.

Все параметры формулы B, отличные от X, являются параметрами формулы $\forall X B$.

Все параметры формулы B, отличные от X, и все переменные, входящие в t, являются параметрами формулы $(t \in 9 X B)$.

Параметры терма t - переменные, входящие в t.

Параметры предикатора $9 X A$ те же, что и формулы $\forall X A$.

Объект языка Π называется <u>замкнутым</u>, если у него нет параметров.

Подстановка терма t вместо переменной X в объект языка Π.

1) $F^{X}_{t}\llcorner n \lrcorner \rightleftharpoons n$, n - натуральное число.

2) $F^{X}_{t}\llcorner Y \lrcorner \rightleftharpoons \begin{cases} Y, & X \neq Y \\ t, & X = Y \end{cases}$.

3)

3) $F^{X}_{t} \langle m\, n \rangle (t_1 \ldots t_k) \rightleftharpoons \langle m\, n \rangle (F^{X}_{t} t_1 \ldots F^{X}_{t} t_k)$.

4) $F^X_{t\llcorner}(u_1=u_2) \rightleftharpoons (F^X_{t\llcorner} u_1\lrcorner = F^X_{t\llcorner} u_2\lrcorner)$

5)
$$F^X_{t\llcorner}\forall Y A\lrcorner \rightleftharpoons \begin{cases} \forall Y A & , X \text{ не параметр } \forall Y A . \\ \forall Y F^X_{t\llcorner} A\lrcorner & , X \text{ - параметр } \forall Y A , \\ & Y \text{ не входит в } t . \\ \forall Z F^X_{t\llcorner} F^Y_{Z\llcorner} A\lrcorner\lrcorner & , Z \text{ - кратчайшая переменная,от-} \\ & \text{личная от } X \text{ и } Y \text{ и не} \\ & \text{входящая в } t . \ X \text{ - параметр} \\ & \forall Y A, \ Y \text{ входит в } t . \end{cases}$$

6) $F^X_{t\llcorner} \daleth Y A\lrcorner \rightleftharpoons$ совершенно аналогично п. 5.

7) $F^X_{t\llcorner}(t_1 \in \daleth Y A)\lrcorner \rightleftharpoons (F^X_{t\llcorner} t_1\lrcorner \in F^X_{t\llcorner} \daleth Y A\lrcorner)$.

8) $F^X_{t\llcorner}(t_1 \in u)\lrcorner \rightleftharpoons (F^X_{t\llcorner} t_1\lrcorner \in F^X_{t\llcorner} u\lrcorner)$

В тех случаях,когда это не может ввести в заблуждение,(как, аример,в случае формулы $\forall Y A$) мы будем использовать вместо $F^X_{t\llcorner} A\lrcorner$ бозначение $A(X|t)$ (в случае $\forall Y A(X|t)$ это обозначение было ы двусмысленным).

I.2. СЕМАНТИКА Π^1.

Зафиксируем некоторую гёделеву нумерацию объектов языка Π. ъект с гёделевым номером n будем обозначать $\ulcorner n \urcorner$, а гёделев мер объекта A - $\langle A \rangle$.

Также зафиксируем отныне на протяжении всей работы некоторую делеву нумерацию примитивно-рекурсивных функций. f^n_k будет означать n - местную ПРФ с гёделевым номером k,если таковая еется,и функцию,тождественно равную нулю в противном случае.

Для сокращения формулировок всюду в дальнейшем,где упоминается кой-то объект языка,этот объект считается замкнутым,если явно оговорено противное.

Это связано с тем,что интерпретируются лишь замкнутые объекты.

<u>Определение I.2.I</u>. Значение терма.

I. $\mathfrak{Z}\llcorner n\lrcorner \rightleftharpoons n$. n - натуральное число.

2. $\zeta_\llcorner <m,n>(t_1,\dots,t_n)_\lrcorner \rightleftharpoons f^n_m(\zeta_\llcorner t_{1\lrcorner},\dots,\zeta_\llcorner t_{n\lrcorner})$.

пункт, касающийся переменных, отпадает, так как, по только что приня- ому соглашению, "терм" для нас означает "замкнутый терм", если мы вно не оговорили противное).

Определение I.2.2. Расшифровка.

Для того, чтобы в некоторых случаях сделать яснее смысл формул ида $(t\in Q)$, мы определим алгорифм расшифровки ρ:

Пусть $\mathfrak{A}$ - алгорифм, перерабатывающий замкнутые предикаторы ими в себя, а остальные слова в алфавите языка Π в предика- ор $\mathsf{q}x(0=1)$.

$$\rho_\llcorner(t\in \mathsf{q}XA)_\lrcorner \rightleftharpoons A(X|t).$$

$$\rho_\llcorner(t\in u)_\lrcorner \rightleftharpoons (t\in \mathfrak{A}_\llcorner \ulcorner \zeta_\llcorner u_\lrcorner \urcorner_\lrcorner).$$

Оба этих пункта естественно отражают тот смысл, который мы пы- лись наметить, указывая, как могут читаться формулы вида $(t\in Q)$.

Определение I.2 Смысл формул языка Π.

Формула $(t=u)$ выражает равенство друг другу значений t и u.

Формула $\forall XA$ выражает наличие общего метода установления тинности формул $A(X|n)$ при любом n.

Формула $(t\in Q)$ выражает то же, что и ее расшифровка.

Из этого определения непосредственно видно, что при определении ысла замкнутых формул языка Π мы существенно опираемся лишь интуицию всеобщности.

Следствие. Формула A истинна тогда и только тогда, когда а выводима в следующей полуформальной системе:

Аксиомы: $(t=u)$ (при $\zeta_\llcorner t_\lrcorner \doteqdot \zeta_\llcorner u_\lrcorner$).

Правила вывода: $\dfrac{\rho_\llcorner(t\in Q)_\lrcorner}{(t\in Q)}$; $\dfrac{\text{при всех } n \;\; A(X|n)}{\forall XA}$

Примеры:

I). Формула $\{\mathsf{q}x(x\in x)\}\in \mathsf{q}x(x\in x)$ не является истинной.

Обозначим $\{\mathsf{q}x(x\in x)\}$ через n. Тогда ?

Рассмотрим класс всех замкнутых формул языка Π за исклю-
ıением формул $(n\in n)$ и $(n\in 9x(x\in x))$.

Все истинные элементарные формулы лежат в этом классе.

Если при всех m формула $A(X|m)$ находится в этом классе, то
ı формула $\forall X A$ находится в этом классе.

Если формула $\rho\llcorner(t\in Q)\lrcorner$ находится в этом классе, то и формула $(t\in Q)$ находится в этом классе.

В самом деле, если $(t\in Q)$ отлична от $(n\in n)$ и $(n\in 9x(x\in x))$, ͘о она лежит в этом классе. Если же она совпадает с одной из этих ͘ормул, то ее расшифровка совпадает с другой, и также не лежит в ͘этом классе.

Таким образом, в рассмотренном классе лежат все истинные фор-ıулы. Следовательно, формула $(n\in n)$ неистинна.

Этот пример показывает, что существуют формулы, расшифровка ко-ͭорых ни в каком смысле их не упрощает. Этим формулам не может быть ıриписан никакой смысл ни в одной из рассматриваемых в данной ͘работе систем.

2). Пусть $\varphi(X)$ – одноместная частично-рекурсивная функция. ͘огда можно построить примитивно-рекурсивную функцию $f(X,Y)$, ͘акую, что

$$\varphi(x) \doteq n \Longleftrightarrow \dot{\exists} y\ f(x,y) \doteq n+1$$

здесь и далее логические символы, отличные от употребляемых в ͘ассматриваемых языках, как, например, $\Longleftrightarrow$, или же с добавле-ͥием точки наверху, как в $\dot{\exists}$, используются как сокращающие ͘имволы для замены слов русского языка).

Мы будем говорить, что ПРФ f вычисляет ЧРФ φ.

По теореме Клини о неподвижной точке ([8], упр. 11-4) построим e_0, такое, что

$$f^2_{e_0}(n,m) \doteq \begin{cases} \ulcorner 9x(0=0)\urcorner & \text{при } f(n,m)>0 \\ \ulcorner 9x(0\in\langle e_0,2\rangle(n,m+1))\urcorner, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $g(n,m) \rightleftharpoons f^2_{e_0}(n,m)$ (В дальнейшем мы не будем различать функции f^n_e и формальные выражения $\langle e,n\rangle$)

Пусть $M \rightleftharpoons \mathfrak{q}x(0 \in g(x,0))$.

Лемма I.2.3. $(n \in M)$ истинно тогда и только тогда, когда $!\varphi(n)$.

Доказательство.

Сначала докажем индукцией по определению истинности следующее утверждение:

Если формула A истинна, то при всех m и n, если $A \doteqdot (0 \in g(n,m))$, или же $A \doteqdot \rho_L(0 \in g(n,m))_\lrcorner$, или же $A \doteqdot \rho_L\rho_L(0 \in g(n,m))_{\lrcorner\lrcorner}$, то существует $k \geqslant m$, такое, что $f(n,k) \neq 0$.

Если формула A элементарна, то может представиться лишь один случай: $A \doteqdot (0=0)$ и $A \doteqdot \rho_L\rho_L(0 \in g(n,m))_{\lrcorner\lrcorner}$. Следовательно, $f(n,m) > 0$, и утверждение доказано.

Если формула A имеет вид $\forall X B$, то условие не может быть выполнено, и утверждение тривиально верно.

Если A имеет вид $(t \in Q)$, и (предположение индукции) мы знаем, что, если $\rho_L A_\lrcorner$ удовлетворяет посылке утверждения, то выполнено его заключение при любых m и n, то могут быть три случая (фиксируем m и n):

I. $A \doteqdot \rho_L\rho_L(0 \in g(n,m))_{\lrcorner\lrcorner}$. Тогда, поскольку A содержит знак $\in$, $g(n,m) \doteqdot \{\mathfrak{q}x(0 \in g(n,m+1))\}$ и $\rho_L A_\lrcorner \doteqdot \rho_L(0 \in g(n,m+1))_\lrcorner$; следовательно, если $\rho_L A_\lrcorner$ истинно, то существует $k \geqslant m+1$, такое, что $f(n,k) \neq 0$. Но это k будет тогда искомым.

2. $A \doteqdot \rho_L(0 \in g(n,m))_\lrcorner$. Тогда $A \doteqdot (0 \in \mathfrak{q}x(0=0))$, если $f(n,m) \neq 0$, и $A \doteqdot (0 \in \mathfrak{q}x(0 \in g(n,m+1)))$, в противном случае. В первом случае всё выполнено тривиально: A истинно, поскольку $\rho_L A_\lrcorner$ истинно, а $f(n,m) \doteqdot 0$. Во втором случае A имеет тот же смысл, что и $\rho_L A_\lrcorner \doteqdot (0 \in g(n,m+1))$, если $\rho_L A_\lrcorner$ истинно, то, по предположению индукции, $k \geqslant m+1$ $f(n,k) \neq 0$.

3. $A \mathrel{\dot=} (0 \in g(n,m))$. Если $\rho_\llcorner A_\lrcorner$ истинно, то, поскольку $\rho_\llcorner A_\lrcorner \mathrel{\dot=} \rho_\llcorner (0 \in g(n,m))_\lrcorner$, существует $k \geqslant m$, такое, что $f(n,k) \mathrel{\dot{\ne}} 0$.

Из доказанного предложения легко следует, что, если истинна формула $(n \in M)$, то $!\varphi(n)$.

Пусть $!\varphi(n)$. Тогда существует такое наименьшее k, что $f(n,k) \mathrel{\dot{\ne}} 0$. Индукцией по $(k-m)$ докажем утверждение:

Если $m \leq k$, то истинно $(0 \in g(n,m))$.

Пусть $k-m \mathrel{\dot=} 0$. Тогда $m \mathrel{\dot=} k$, $f(n,m) \mathrel{\dot{\ne}} 0$, и мы имеем:

$$\rho_\llcorner (0 \in g(n,m))_\lrcorner \mathrel{\dot=} (0 \in \text{ч}x(0=0)),$$

$$\rho_\llcorner \rho_\llcorner (0 \in g(n,m))_{\lrcorner\lrcorner} \mathrel{\dot=} (0=0).$$

Поскольку истинно $\rho_\llcorner \rho_\llcorner A_{\lrcorner\lrcorner}$, то истинно $\rho_\llcorner A_\lrcorner$, а поскольку истинно $\rho_\llcorner A_\lrcorner$, то истинно A.

Пусть теперь $k-m \mathrel{\dot=} l+1$. Тогда $f(n,m) \mathrel{\dot{\ne}} 0$, и

$$\rho_\llcorner (0 \in g(n,m))_\lrcorner \mathrel{\dot=} (0 \in \text{ч}x(0 \in g(n,m+1)))$$

$$\rho_\llcorner \rho_\llcorner (0 \in g(n,m))_{\lrcorner\lrcorner} \mathrel{\dot=} (0 \in g(n,m+1)).$$

Поскольку $k-(m+1) = l$, то $(0 \in g(n,m+1))$ истинно, по предположению индукции, и мы получаем, что истинно

$$(0 \in g(m,n)).$$

Следовательно, если $!\varphi(n)$, то истинно $(n \in M)$.

Лемма доказана.

Этот пример показывает, что в языке Π можно выразить понятие применимости алгорифма к слову, не прибегая к помощи квантора $\exists$. Вместе это показывает, что язык существенно сильнее языка, который получился бы из него удалением правил, относящихся к символу $\in$, и даже языка, получающегося удалением правила 4 для построения формул, позволяющего нам строить выражение вида $(t \in u)$.

Правило же 3, позволяющее нам строить выражения вида $(t \in \text{ч}xA)$, некотором смысле избыточно. Небольшим переопределением алгорифма ρ ам можно было бы избавиться от всякого употребления таких формул, а аодно и от понятия предикатора. Но здесь синтаксическая простота е искупает недостатков, связанных с утяжелением формулировок и меньей очевидностью интерпретации.

I.3. Запирание.

Определение I.3.I. (Гёделева нумерация кортежей натуральых чисел).

$$[\,] \rightleftharpoons 0;$$

$$[x_1, \ldots, x_k] \rightleftharpoons 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{x_k+1} - 1$$

p_k - k -тое простое число).

В дальнейшем мы будем отождествлять кортежи натуральных чисел их гёделевыми номерами.

Можно определить примитивно-рекурсивные функции

$lh(x)$ - длина кортежа с номером x. Длина $[\,]$ считается равной 0.

$(x)_i$ - i -тый член кортежа x, если $i \leq lh(x)$ и $i \neq 0$, противном случае - ноль.

$x * y$ - операция соединения двух кортежей: $[x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l]$.

Определение I.3.2. Пусть f - одноместная общерекурсивная ункция. f запирает x ($f \mathfrak{Z} x$) тогда и только тогда, гда

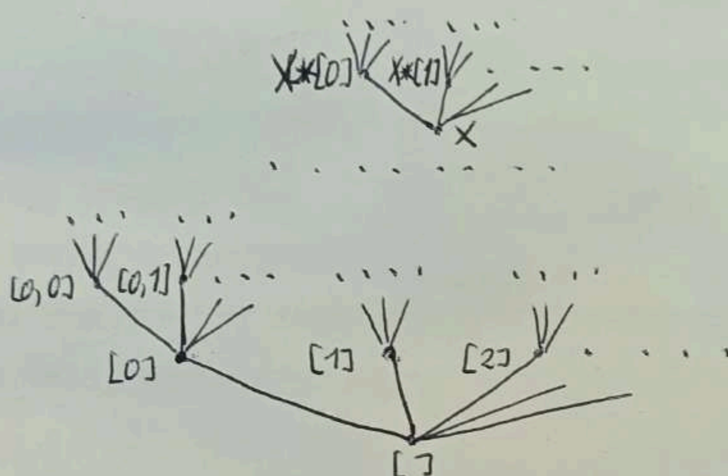
I. $f(x) \doteq 0$ или

2. $f(x) \neq 0$ и для всех n функция f запирает $x * [n]$.

Это определение является индуктивным. Оно похоже на индуктиве определение смысла формулы, данное в предыдущем параграфе. Если едовать терминологии Клини, к этим двум пунктам надо было бы бавить косвенный пункт: нет никаких других x, запираемых f. нако мы никогда не будем писать этого пункта в подобных случаях.

Перечисление правил,по которым образуется данное понятие,автома-
тически означает,что оно устанавливается лишь по этим,явно пере-
численным в его определении,правилам.

Интуиционист и классик могли бы сформулировать определение запирания следующим образом:функция запирает кортеж тогда и только тогда,когда каждый путь в универсальном дереве кортежей,проходящий через x ,натыкается выше на нуль функции f .



Черт. I. Универсальное дерево кортежей.

то замечание объясняет,почему для понятия $f3x$ было выбрано акое название.

В дальнейшем для того,чтобы задать семейство функций,мы часто будем пользоваться λ - обозначениями.

Теорема 1.3. Если $f(x,y)$ - ПРФ,то существует такой предикатор языка $\Pi:M$ с единственным параметром y ,что при всех n

$$\lambda x f(x,n) 3 m \Leftrightarrow \models_n (m \in F^y_{n} \llcorner m \lrcorner) \quad \llcorner M \lrcorner \; ?$$

Доказательство.

Сначала докажем,что для всякой ПРФ $f(x)$ можно построить предикатор M_f ,такой,что

$$f 3 n \Leftrightarrow \models_n n \in M_f \ .$$

Построим ПРФ $g'(\ell,x)$:

$$g'(\ell,n) \rightleftharpoons \ulcorner \exists x(0=0) \urcorner \quad ,\text{если} \quad f(n) \doteq 0 .$$

$g'(e,n) \rightleftharpoons \{\{q x \forall y (x*[y] \in \langle e,1\rangle (x*[y]))\}\}$, иначе.

По теореме о неподвижной точке Клини мы можем подобрать такое e_0, что $f^1_{e_0}(x) \doteq g'(e_0,x)$.

Обозначим $\lambda x\, g'(e_0,x)$ через $g(x)$. $M_f \rightleftharpoons q x(x \in g(x))$.

Опять-таки действуем индукцией по определению смысла.Однако десь эта индукция будет проведена не в такой развёрнутой форме, ак в лемме I.2.3. Принципиальная сторона таких доказательств уже остаточно раскрыта полным доказательством этой леммы,и не составнет никакого труда переформулировать сокращённое доказательство эоремы в полное,но при этом длина доказательства увеличится в эсколько раз.

Назовём формулу вида $(n \in g(n))$ <u>корректной</u>,если она истинна огда и только тогда,когда $f \ni n$.

Пусть все формулы вида $(m \in g(m))$, которые нам потребуются ия того,чтобы определить смысл $(n \in g(n))$,корректны.Докажем, го и $(n \in g(n))$ корректна.

Могут представиться два случая:

I. $f(n) \doteq 0$. Тогда $\rho_{\llcorner}(n \in g(n))_{\lrcorner} \doteq (n \in q x(0=0))$ и $n \in g(n)$ истинна.В этом случае $n \in g(n)$ корректна.

2. $f(n) \neq 0$. Тогда

$$\rho_{\llcorner}(n \in g(n))_{\lrcorner} \doteq (n \in q x \forall y (x*[y] \in g(x*[y])))$$

$$\rho_{\llcorner}\rho_{\llcorner}(n \in g(n))_{\lrcorner\lrcorner} \doteq \forall y (n*[y] \in g(n*[y]))$$

для каждого k формула $n*[k] \in g(n*[k])$ корректна по едположению индукции.Следовательно,по определению смысла, $n \in g(n))$ истинна тогда и только тогда,когда для каждого k тинна $(n*[k] \in g(n*[k]))$, и,следовательно,тогда и только да,когда $\forall k\; f \ni n*[k]$.Следовательно, $(n \in g(n))$ орректна.

Итак, $(n \in M_f)$ истинно тогда и только тогда,когда $f \ni n$.

Для доказательства теоремы в полной формулировке достаточно заметить,что все приведённые нами построения примитивно-рекур-ивны,и,следовательно,у нас есть ПРФ,строящая по гёделеву номеру дноместной ПРФ f гёделев номер M_f.

Из теоремы I.3 легко получается в классической и интуицио-истской математике теорема о том,что всякое Π^1_1 - множество т.е. множество натуральных чисел,представимое в языке второго орядка с переменными для функций α, β ... формулой вида $\forall\alpha A(\alpha)$, де $A(\alpha)$ не содержит кванторов по функциям) представимо как мно-ество таких натуральных чисел n ,что $\models_{\Pi}(n\in M)$ (M - предикатор зыка Π).

А именно,уточняя наши формулировки,рассмотрим язык $\mathcal{PA}$ позитивный анализ),имеющий два сорта переменных: x , y , z ... ля натуральных чисел. α , β , γ ... - для функций,перераба-ывающих натуральные числа в натуральные числа.Термы языка $\mathcal{PA}$ бразуются по тем же правилам,что и термы языка Π .а также правилу

4. Если α - переменная для функций, t - терм,то $\alpha(t)$ - ерм.

Формулы.

1. Если t и u - термы,то $(t=u)$ и $(t\neq u)$ - элементарные рмулы.
2. Если A и B - формулы,то $(A\,\&\,B)$ - формула.
3. Если A и B - формулы,то $(A\vee B)$ - формула.
4. Если A - формула, V - переменная,то $\forall V A$ -формула.
5. Если A - формула, V - переменная,то $\exists V A$ -формула.

Π^1_1 - формулой в языке $\mathcal{PA}$ назовём формулу $A(x)$ с единствен-й свободной переменной x ,такую,что $A(x)$ имеет вид $\forall\alpha B(x,\alpha)$, $B(x,\alpha)$ не содержит кванторов по функциям.

Известна следующая теорема (в интуиционистском случае оказанная Крайзелем [9]):

По каждой Π^1_1 - формуле языка PA можно примитивно-рекурсивно построить ПРФ $f(x,y)$ такую, что $\lambda y\, f(n,y) \ni 0$ тогда и только тогда, когда верно $A(n)$.

После того, как такая f построена, мы можем непосредственно применить теорему I.3 и построить такой предикатор $M(y)$, что $\models_\Pi (0 \in M(y|n)) \Longleftrightarrow A(n)$. Тогда предикатор $N \rightleftharpoons \lambda y(0 \in M)$ будет таким, что ри всех n

$$\models_\Pi (n \in N) \Longleftrightarrow \text{ верно } A(n).$$

Заметим, что в классической математике язык PA совпадает по разительной силе с полным языком анализа.

Лемма I.3.3. Для каждой ОРФ $f(x,y)$ можно примитивно-рекурсивно строить ПРФ $g(x,y)$, такую, что

$$\lambda y\, f(n,y) \ni 0 \Longleftrightarrow \lambda y\, g(n,y) \ni 0$$

казательство. Построим ОРФ

$$\tilde f(x,y) \rightleftharpoons \prod_{z \le y} f(x,z)$$

$\lambda y\, \tilde f(n,y) \ni 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda y\, f(n,y) \ni 0$. Это очевидно.

Теперь построим ПРФ $h(x,y,z)$, вычисляющую $\tilde f(x,y)$.

В качестве $g(x,y)$ возьмём ПРФ

$$\prod_{z \le lh(y)} |h(x,y,z) - 1| .$$

I. Если $\lambda y\, \tilde f(n,y) \ni x$, то и $\lambda y\, g(n,y) \ni x$.

Если $\tilde f(n,x) \doteq 0$, то у нас существует такое ℓ, $g(n, x * v) \doteq 0$ для всех кортежей v длины ℓ.

Будем действовать индукцией по ℓ.

Базис. $\ell \dot{=} 0$. Тогда $g(n,x) \dot{=} 0$ и доказательство закончено.

Шаг. $\ell \dot{=} m+1$. Тогда $(x*[k])*v \dot{=} x*([k]*v)$ и для всех k у нас $\lambda y\, g(n,y) \, 3 \, x*[k]$. Следовательно, $\lambda y\, g(n,y) \, 3 \, x$.

Если же $\forall k\, \lambda y\, \tilde{f}(n,y) \, 3 \, x*[k]$, то, по предположению индукции, у нас для всех k $\lambda y\, g(n,y) \, 3 \, x*[k]$, и, следовательно, $\lambda y\, g(n,y) \, 3 \, x$.

2. Если $\lambda y\, g(n,y) \, 3 \, x$, то и $\lambda y\, \tilde{f}(n,y) \, 3 \, x$,

Если $g(n,x) \dot{=} 0$, то и $\tilde{f}(n,x) \dot{=} 0$.

Если $\forall k\, \lambda y\, g(n,y) \, 3 \, x*[k]$, то, по предположению индукции, $\forall k\, \lambda y\, \tilde{f}(n,y) \, 3 \, x*[k]$, и $\lambda y\, \tilde{f}(n,y) \, 3 \, x$.

Доказательство закончено.

Следствие. Понятие вывода в полуформальной системе выразимо в языке Π.

Отсюда уже следует, что каждому предикатору M языка Π можно сопоставить ПРФ $f(x,y)$, такую, что

$$\lambda y\, f(n,y) \, 3 \, 0 \Leftrightarrow \vDash_{\Pi} (n \in M).$$

Эту ПРФ мы будем называть сопряжённым запиранием.

Таким образом, формулы языка Π в чистом виде отражают понятие запирания.

Язык Π, в котором используется одна лишь интуиция всеобщности, позволяет до некоторой степени оправдать понятие полуформального вывода.

До сих пор, при исследовании языка Π, мы оставались в общей части всех трёх математик: все наши рассуждения безо всякого изменения могли быть приняты как конструктивистом, понимающим понятие запирания, так и интуиционистом или классиком (однако в исходных определениях мы существенно стояли на конструктивной точке зрения; классик или интуиционист не стал бы формулировать понятие числа или запирания индуктивно, а понял бы его при помощи выска-

ывaний типа "для всех функций" или "для всех свободно становящих-
я последовательностей").

В дальнейшем нам придется воспользоваться гораздо более мощными огическими средствами, хотя объем множеств, с которыми мы оперируем, актически не изменяется. В связи с отсутствием сколько-нибудь единообразного подхода с эффективной точки зрения к теориям, использующим неарифметические высказывания, мы в дальнейшем будем рассуждать метаматематике классически, хотя семантики рассматриваемых теорий удут строиться так, чтобы отражать неклассические принципы математики, такие, как тезис Чёрча и т.д. Этот подход аналогичен подходу лини в его книгах "Введение в МЕТА математику" и " Introduction into tuitionistic mathematics".

ЧАСТЬ 2.

В этой части рассматривается язык $\triangle$,содержащий помо квантора $\forall$ ещё и импликацию $\supset$.Строится семантика языка $\triangle$ на основе понятия реализуемости.Доказывается приемлемость авил вывода классической логики,строится полуформальная система, екватно отражающая понятие истинности,и доказывается,что всякая рмула языка $\triangle$ сводима по истинности к формуле языка Π .

Более подробно структура формул языка $\triangle$ будет разобрана третьей части.

2.0. КОНСТРУКТИВНЫЕ ОРДИНАЛЫ КЛИНИ.

Для этой цели мы воспользуемся теорией конструктивных ординалов ини [10] .

Определим по теореме о неподвижной точке Клини ЧРФ $Sh(m,n)$.

$$Sh(m,2^x) \simeq \begin{cases} 0, & m \doteq x \\ Sh(m,x), & \text{иначе} \end{cases};$$

$$Sh(m,3\cdot 5^e) \simeq O^1(\forall n\, Sh(x, f_e^1(n)) \doteq 0);\ ,$$

не определено,если n не имеет ни одного из этих видов.

(Напомним,что f_e^1 есть одноместная ПРФ с номером e , и таковая существует,и функция $O^1(x)$,иначе).

Можно доказать следующие предложения:

1. $Sh(m,n) \doteq 0 \ \&\ Sh(n,k) \doteq 0 \Rightarrow Sh(m,k) \doteq 0$
2. $\sim Sh(m,m) \doteq 0$
3. $Sh(m,n) \doteq 0 \Rightarrow \sim Sh(n,m) \doteq 0$

Таким образом, $Sh(m,n) \doteq 0$ является отношением частичного порядка. Это отношение мы будем обозначать $\prec\prec$ (читается " m короче n ").

Определение 2.0.I (Индуктивное).

Конструктивные (клиниевские) ординалы.

I. 0 - клиниевский ординал.

2. Если α - клиниевский ординал, то и 2^{α} - клиниевский ординал.

3. Если e - гёделев номер ПРФ, такой, что при всех n $f_e^1(n)$ клиниевский ординал и $f_e^1(n) \prec\prec f_e^1(n+1)$, то $3\cdot 5^e$ - клиниевский ординал. Предложение " α - конструктивный ординал" мы будем сокращённо записывать $\alpha \in \mathcal{O}$. Каждому $\alpha \in \mathcal{O}$ однозначно сопоставляется настоящий ординал $|\alpha|$ следующим образом:

$$|0| \rightleftharpoons 0$$
$$|2^{\alpha}| \rightleftharpoons |\alpha| \oplus 1$$

($\oplus$ - сумма ординалов)

$$|3\cdot 5^e| \rightleftharpoons \sup_{n<\omega} |f_e^1(n)|$$

Первый ординал λ, такой, что $\sim \dot{\exists} \alpha \in \mathcal{O}\ \lambda \doteq |\alpha|$ мы будем обозначать ω_1 и называть первым неконструктивным ординалом, а все ординалы $\prec \omega_1$ - конструктивными.

Содержательно 2^{α} означает ординал, следующий за α, а $3\cdot 5^e$ - верхний предел возрастающей последовательности ординалов, задаваемой ПРФ f_e^1.

Лемма 2.0.I. Если α - клиниевский ординал, то

I. Если $\beta \prec\prec \alpha$, то β - клиниевский ординал.

2. Если $\beta \prec\prec \alpha$ и $\gamma \prec\prec \alpha$, то $\gamma \doteq \beta$, $\gamma \prec\prec \beta$ или $\beta \prec\prec \gamma$ (т.е. на множестве $\{\beta \mid \beta \prec\prec \alpha\}$ $\prec\prec$ является линейным порядком).

Эта лемма легко доказывается индукцией по определению понятия клиниевского ординала. Здесь и в дальнейшем широко известные и просто доказываемые предложения о клиниевских ординалах доказываться не будут.

Лемма 2.0.2 (Принцип трансфинитной индукции):

Если верно $\mathcal{P}(0)$, и из того, что для всех $\beta \prec\prec \alpha$ верно $\mathcal{P}(\beta)$, итекает, что верно $\mathcal{P}(\alpha)$, то для всех конструктивных ординалов α ерно $\mathcal{P}(\alpha)$.

Доказательство. (Символически $\dot\forall \alpha(\dot\forall \beta \prec\prec \alpha \mathcal{P}(\beta) \Rightarrow \mathcal{P}(\alpha)) \Rightarrow \dot\forall \alpha \mathcal{P}(\alpha))$

Будем доказывать индукцией по определению понятия конструк-ивного ординала высказывание "для всех β, таких, что $\beta \rightleftharpoons \alpha$ или $\beta \prec\prec \alpha$, выполнено $\mathcal{P}(\beta)$".

Обозначим это высказывание $Q(\alpha)$.

$Q(0)$ выполнено по условию трансфинитной индукции.

Если выполнено $Q(\alpha)$, то, поскольку $\beta \prec\prec 2^{\alpha}$ тогда и олько тогда, когда $\beta \rightleftharpoons \alpha$ или $\beta \prec\prec \alpha$, то для всех $\beta \prec\prec 2^{\alpha}$ выполнено $\mathcal{P}(\beta)$, и, следовательно, по шагу трансфинитной индукции, выполнено $\mathcal{P}(2^{\alpha})$. Следовательно, $Q(2^{\alpha})$.

Если при всех n выполнено $Q(f_e^1(n))$, то, поскольку $\beta \prec\prec 3 \cdot 5^e$ гда и только тогда, когда при некотором n $\beta \prec\prec f_e^1(n)$, у нас я всех $\beta \prec\prec 3 \cdot 5^e$ выполнено $\mathcal{P}(\beta)$, и, следовательно, по шагу индук-и, выполнено $\mathcal{P}(3 \cdot 5^e)$, следовательно, $Q(3 \cdot 5^e)$.

Доказательство закончено.

Таким образом, отношение $\prec\prec$ задает полный порядок на ожестве всех $\beta \prec\prec \alpha$, если α - клиниевский ординал.

Определим по теореме о неподвижной точке Клини ПРФ $\alpha \oplus_\sigma \beta$, $\alpha \otimes_\sigma \beta$, $\alpha^{\circ \beta}$ (ординальная сумма, ординальное произведение, ординальная степень):

а) $\alpha \oplus_\sigma 0 \rightleftharpoons \alpha$,
$\alpha \oplus_\sigma 2^{\beta} \rightleftharpoons 2^{\alpha \oplus_\sigma \beta}$, $\alpha \oplus_\sigma 3 \cdot 5^e \rightleftharpoons 3 \cdot 5^{\ulcorner \lambda x(\alpha \oplus_\sigma f_e^1(x))\urcorner}$.

б) $\alpha \otimes_\sigma 0 \rightleftharpoons 0$, $\alpha \otimes_\sigma 2^{\beta} \rightleftharpoons (\alpha \otimes_\sigma \beta) \oplus_\sigma \alpha$,
$\alpha \otimes_\sigma 3 \cdot 5^e \rightleftharpoons 3 \cdot 5^{\ulcorner \lambda x(\alpha \otimes_\sigma f_e^1(x))\urcorner}$.

в) $\alpha^{\circ 0} \rightleftharpoons 1$, $\alpha^{\circ 2^{\beta}} \rightleftharpoons \alpha^{\circ \beta} \otimes_\sigma \alpha$, $0^{\circ \beta} \rightleftharpoons 0$,
$\alpha^{\circ 3 \cdot 5^e} \rightleftharpoons 3 \cdot 5^{\ulcorner \lambda x(\alpha^{\circ} f_e^1(x))\urcorner}$.

В дальнейшем слова " α - ординал" мы будем сокращённо

писывать $\alpha \in On$

Лемма 2.0.3.

а) $\alpha \in \mathcal{O},\ \beta \in \mathcal{O} \Rightarrow \alpha \oplus_{\mathcal{O}} \beta,\ \alpha \otimes_{\mathcal{O}} \beta,\ \alpha^{o\beta} \in \mathcal{O}$.

б) $\beta <\!\!< \gamma \Rightarrow \alpha \oplus_{\mathcal{O}} \beta <\!\!< \alpha \oplus_{\mathcal{O}} \gamma$,

$\in \mathcal{O}\ \&\ \beta <\!\!< \gamma \Rightarrow \alpha \otimes_{\mathcal{O}} \beta <\!\!< \alpha \otimes_{\mathcal{O}} \gamma$,

$\mathcal{O}\ \&\ \beta <\!\!< \gamma \Rightarrow \alpha^{o\beta} <\!\!< \alpha^{o\gamma}$.

Следствие. $\alpha <\!\!< \alpha \oplus \beta$ ($\beta \neq 0$).

Рассмотренные свойства клиниевских ординалов дают нам возмож-
ть определять ЧРФ индукцией по клиниевским ординалам.

2.I. Синтаксис и семантика языка Δ.

Знаки языка Δ - те же, что и у языка Π , и ещё знак $\supset$.

Термы языка Δ - те же, что и в языке Π .

Формулы языка Δ .

Определяются так же, как и формулы языка Π , с добавлением одного порождающего правила:

5. Если A и B - формулы, то $(A \supset B)$ - формула.

Аналогично понятиям, определенным в языке Π , определяются
рифм значения z , понятия параметров, замкнутой формулы,
дикатора, терма. Фиксируется некоторая гёделева нумерация объектов
ка Δ . Точно так же, как и в языке Π , определяется алго-
м расшифровки ρ .

Теперь трансфинитной индукцией по ординалам определим одновре-
но два понятия " число n реализует формулу A на уровне α ",
ло n виртуально реализует формулу A на уровне α "
кращённые обозначения $n[R]_{\alpha} A$ и $n[CR]_{\alpha} A$,
ветственно).

Определение 2.I.

I. $n[R]_\alpha (t=u) \Leftrightarrow n[CR]_\alpha (t=u) \Leftrightarrow \ulcorner t \urcorner \doteq \ulcorner u \urcorner$ (α ∈ любой).

1a. $n[CR]_0 \; A$. A - неэлементарна.

2. $n[R]_{\alpha\oplus 1} (A \supset B) \Leftrightarrow$

$\forall x (x[CR]_\alpha A \Rightarrow\, !\langle n\rangle(x) \,\&\, \langle n\rangle(x) [R]_\alpha B)$

2a. $n[CR]_{\alpha\oplus 1} (A \supset B) \Leftrightarrow$

$\dot\forall x (x[R]_\alpha A \Rightarrow\, !\langle n\rangle(x) \dot{\&} \langle n\rangle(x) [CR]_\alpha B)$

3. $n[R]_{\alpha\oplus 1} \forall X A \Leftrightarrow$

$\forall m (!\langle n\rangle(m) \,\&\, \langle n\rangle(m) [R]_\alpha A(X|m))$

3a. $n[CR]_{\alpha\oplus 1} \forall X A \Leftrightarrow$

$\dot\forall m (!\langle n\rangle(m) \dot{\&} \langle n\rangle(m) [CR]_\alpha A(X|m))$

4. $n[R]_{\alpha\oplus 1} (t \in Q) \rightleftharpoons f^1_n(0) [R]_\alpha \ulcorner p_L(t \in Q) \urcorner$

4a. $n[CR]_{\alpha\oplus 1} (t \in Q) \rightleftharpoons f^1_n(0) [CR]_\alpha \ulcorner p_L(t \in Q) \urcorner$

5. $n[R]_\lambda A \Leftrightarrow \dot\exists_{\beta<\lambda} n[R]_\beta A$ (λ-предельный).

5a. $n[CR]_\lambda A \Leftrightarrow \dot\forall \beta<\lambda \; n[CR]_\beta A$ (λ-предельный).

/ A - неэлементарна /.

Содержательно можно интерпретировать понятие " n реализует уровне α формулу A " как " n кодирует конструктивное обосноие формулы A ". Ординал α ограничивает сложность этого обоснования.

Понятие же " n виртуально реализует на уровне α формулу " можно интерпретировать как возможность того, что n да-нибудь, на более высоком уровне, реализует формулу A , или как невозможность опровержения этой возможности средствами, ощимися у нас на уровне α .

Лемма 2.I.I. Если $n[R]_\alpha A$, то $\dot\forall_\beta \; n[CR]_\beta A$.

Доказательство.

Докажем индукцией по ординалу β утверждение:

Если $n[R]_\alpha A$ и $\alpha < \beta \oplus 1$, то $\forall \gamma < \beta \oplus 1\ n[CR]_\gamma A$.

Базис. Если $\beta \doteq 0$, то $n[R]_0 A$ тогда и только тогда, когда A истинная элементарная формула. Но в этом случае по пункту I нас при любом γ любое n виртуально реализует A.

Шаг № I. Пусть утверждение доказано для β. Докажем его для $\beta \oplus 1$.

Рассмотрим различные случаи.

Для того, чтобы облегчить дальнейшие рассуждения, предварительно докажем ещё одно важное свойство реализуемости и виртуальной реализуемости:

ЛЕММА 2.I.2. Если $\alpha \prec \beta$, и $n[R]_\alpha A$, то $n[R]_\beta A$.

Если $\alpha \prec \beta$, и $n[CR]_\beta A$, то $n[CR]_\alpha A$.

Доказательство.

Индукция по α.

Пусть $\alpha \doteq 0$. Тогда $n[R]_0 A$ тогда и только тогда, когда A - элементарная истина, и, следовательно, при всех $\beta\ n[R]_\beta A$.

Совершенно аналогично проводится рассуждение для $[CR]$: если $n[CR]_\beta A$, то либо A - элементарна и истинна, и тогда, $n[CR]_0 A$, либо A - неэлементарна и тогда $n[CR]_0 A$ по пункту I а.

Пусть утверждение леммы доказано для α. Докажем его для $\alpha \oplus 1$. В зависимости от вида ординала β могут представиться два случая:

а/. $\beta \doteq \gamma \oplus 1$. Рассмотрим формулу A. Если A элементарна, то всё очевидно. Если A имеет вид $(B \supset C)$, то

$\forall x (x [R]_\gamma B \Rightarrow \dot{!}\langle n\rangle(x) \& \langle n\rangle(x) [R]_\gamma C)$,

$n[R]_\beta A \Leftrightarrow \forall x (x [CR]_\gamma B \Rightarrow \dot{!}\langle n\rangle(x) \& \langle n\rangle(x) [CR]_\gamma C)$.

$n[CR]_\beta A \Leftrightarrow \forall x (x [R]_\gamma B \Rightarrow \dot{!}\langle n\rangle(x) \& \langle n\rangle(x) [R]_\alpha C)$,

по тому же определению

$n[R]_{\alpha\oplus 1} A \Leftrightarrow \forall x (x [CR]_\alpha B \Rightarrow \dot{!}\langle n\rangle(x) \& \langle n\rangle(x) [CR]_\alpha C)$.

$n[CR]_{\alpha\oplus 1} A \Leftrightarrow \forall x (x [R]_\alpha B \Rightarrow \dot{!}\langle n\rangle(x) \& \langle n\rangle(x) [R]_\alpha C)$,

По предположению индукции: $n[R]_\alpha B \Rightarrow n[R]_\gamma B$,

$[CR]_\gamma B \Rightarrow n[CR]_\alpha B$. Следовательно, т.к. то же верно для C,

$[CR]_{\alpha\oplus 1} A \Rightarrow n[R]_\beta A$, $n [CR]_\beta A \Rightarrow n[R]_{\alpha\oplus 1} A$,

о и требовалось доказать.

Остальные случаи разбираются совершенно аналогично.

Пусть β теперь предельный.

Тогда, по предположению индукции, если $\gamma < \beta$, то для этого γ

полнено условие леммы. Но, если $n[R]_\gamma A$, то $n[R]_\beta A$,

если $n[CR]_\beta A$, то $n[CR]_\gamma A$. Что и требовалось

казать.

Пусть теперь α предельный и для всех $\delta < \alpha$ условие леммы уже дока-

но. Тогда, если $\beta > \alpha$, то $\beta > \delta$, и, следовательно, по

нкту 5 определения, если $n[R]_\alpha A$, то при каком-то $\delta < \alpha$

$[R]_\delta A$, и, по предположению индукции, $n[R]_\beta A$.

ли же $n[CR]_\beta A$, то, по предположению индукции, при всех $\delta < \alpha$

$[CR]_\delta A$ и, по пункту 5а, $n [CR]_\alpha A$.

Доказательство леммы 2.I.2 завершено.

Лемма 2.I.2 в некотором смысле подтверждает корректность

бранных определений. С возрастанием уровня α обоснования, найден-

е на предыдущих уровнях, остаются обоснованиями, а "возможных обосно-

ний" становится всё меньше: всё для большего числа натуральных

ел мы можем гарантировать, что они никогда не смогут стать обосно-

ием, всё больше и больше сил нам приходится затратить для того,

бы обосновать возможность того, что данное n когда-либо может стать зашифрованным обоснованием.

На нулевом шаге у нас был минимальный набор подтверждённых уждений - только непосредственно элементарно истинные,а для не- элементарных мы на всякий случай постулировали,что в дальнейшем их обоснованием может стать всё,что угодно.В дальнейшем количество одтверждённых истин у нас возрастает,а возможные реализации под- ергаются всё более и более строгим ограничениям.

Как известно,в математической логике труднее всего определить мысл импликации.У нас лишь для формул вида $(A \supset B)$ в определении еализуемости и виртуальной реализуемости присутствуют одновремен- о оба эти понятия.В отличие от реализуемости по Клини,мы должны меть находить реализацию заключения не только по реализации по- ылки,но и по тому,что в будущем может стать такой реализацией. налогично,для того,чтобы на уровне $\alpha \oplus 1$ сохранилась возможность ого,что n когда-либо реализует $(A \supset B)$,у нас должно по всякой на- тоящей реализации A уметь находить хотя бы виртуальную реализа- ию B.

Окончание доказательства леммы 2.I.I.

а/. A - элементарна.Доказательство тривиально.

б/. $A \doteq (B \supset C)$. Пусть $n [R]_{\alpha \oplus 1} (B \supset C)$,

огда $\forall x (x [CR]_\alpha B \supset\, !\langle n \rangle (x) \,\&\, \langle n \rangle (x) [R]_\alpha C)$,

ввиду того,что,по предположению индукции,в частности,

$x [R]_\alpha B \Rightarrow x [CR]_\alpha B$, $x [R]_\alpha C \Rightarrow x [CR]_\alpha C$

$\langle n \rangle$,во всяком случае,находит по всякой действительной реализа- ии на уровне α формулы B виртуальную реализацию формулы C на м же уровне.Следовательно, $n [CR]_{\alpha \oplus 1} (B \supset C)$.Отсюда при помощи леммы I.2,легко извлечь полное доказательство утверждения индукции.

в/ $A \doteq \forall x B$.Так как,по предположению индукции, при кдом m $!\langle n \rangle (m)$ и $\langle n \rangle (m) [CR]_\alpha B(x|m)$

$n [R]_{\alpha \oplus 1} \forall x B \Rightarrow n [CR]_{\alpha \oplus 1} \forall x B$. , г/. $A \doteq (1\in Q)$, Здесь шаг тривиален.

Шаг № I закончен.

<u>ШАГ № 2</u>. Пусть утверждение доказано для всех $\beta<\alpha$. Докажем го для α . Если $n[R]_\alpha A$,то,по п.5,при некотором $\beta<\alpha$ $n[R]_\beta A$, ,следовательно,при всех $\beta<\alpha$ $n[CR]_\beta A$.Значит,по п.5а, $n[CR]_\alpha A$.

Теперь,если у нас есть какие-то α и β ,и $n[R]_\alpha A$,то $n[R]_{\beta\oplus\alpha} A$ и $n[CR]_{\beta\oplus\alpha} A$. Следовательно, $n[CR]_\beta A$.

Доказательство леммы 2.I.I закончено.

Итак,если на какой-то ступени α формула A реализуема,то то же амое число виртуально реализует A на любой ступени.Таким образом, иртуальная реализация в некотором смысле действительно означает озможность реализации.Однако обратная теорема к лемме 2.I.I. е верна,а именно:

<u>Лемма 2.I.4.</u> Пусть 1 - гёделев номер предиката $qx(x\in x)$.

Если $\alpha\in On$, n - натуральное число,то

$n[CR]_\alpha(1\in 1)$ и неверно,что $n[R]_\alpha(1\in 1)$.

<u>Доказательство.</u>

Будем доказывать утверждение теоремы индукцией по α одно-ременно для $(1\in 1)$ и $(1\in qx(x\in x))$.

Если $\alpha\doteq 0$,то всё очевидно,так как обе эти формулы элементарны.

Пусть $\alpha\doteq\beta\oplus 1$. Тогда $n[R]_\alpha(1\in 1)\Leftrightarrow f_n^1(0)[R]_\beta(1\in qx(x\in x))$,
$R]_\alpha(1\in qx(x\in x))\Leftrightarrow f_n^1(0)[R]_\beta(1\in 1)$,и точно так же,наоборот:
$R]_\alpha(1\in 1)\Leftrightarrow f_n^1(0)[CR]_\beta(1\in qx(x\in x))$, $n[CR]_\alpha(1\in qx(x\in x))\Leftrightarrow f_n^1(0)[CR]_\beta(1\in 1)$.
для β предположение индукции уже проверено.

Пусть α - предельный.Тогда шаг индукции легко получается пунктов 5 и 5а определения 2.I.

<u>Следствие</u>. Ни при каком $\alpha\in On$ никакое n не реализует мулу $(1\in 1\supset 1\in 1)$.

Если нам удалось построить такое α и такое n, что $[R]_\alpha A$, то формула A будет называться <u>истинной</u>, или <u>еализуемой</u>.

Таким образом, смысл формул языка Δ состоит в существовании еализации.

Уже следствие, приведённое на этой странице, показывает, что огика рассматриваемой теории отличается от обычной, а именно, не сегда истинен даже такой простой логический закон, как $(A \supset A)$. ледующий параграф посвящён рассмотрению этой логики.

§ 2.2. Логика языка Δ.

Стандартные реализации.

<u>Определение 2.2.I.</u> Алгорифм, вычисляющий вероятную стандартую реализацию формулы A.

Определим по теореме о неподвижной точке Клини ОРФ $SR(A)$:

$$SR(t=u) \rightleftharpoons 0;$$
$$SR(t\in Q) \rightleftharpoons \{\lambda n. SR(p_{\llcorner}(t\in Q)_{\lrcorner})\};$$
$$SR(A\supset B) \rightleftharpoons \{\lambda n. SR(B)\};$$
$$SR(\forall x A) \rightleftharpoons \{\lambda n. SR(E^{x}_{n\llcorner}A_{\lrcorner})\}$$

<u>Лемма 2.2.I.</u> Для всех α, n, если $n[CR]_\alpha A$, $SR(A)[CR]_\alpha A$.

<u>Доказательство.</u> Индукция по α. При $\alpha \doteqdot 0$ утверждение ммы очевидно.

Если $\alpha \doteqdot \beta \oplus 1$, то разберем различные случаи, в зависимос- от вида формулы A.

а/ $A \doteqdot (t=u)$. Очевидно,

б/ $A \doteqdot (B \supset C)$. Тогда

$$R]_\alpha A \Leftrightarrow \dot\forall_x (x[CR]_\beta B \Rightarrow\, !\langle n\rangle(x) \,\&\, \langle n\rangle(x)[R]_\beta C)$$

по предположению индукции,

$$\langle n\rangle(x)[R]_\beta C \Rightarrow SR(C)[R]_\beta C$$

ледовательно,

$$\forall x\,(x\,[CR]_\beta B \Rightarrow SR(C)\,[R]_\beta\, C)$$,

$$SR(A)\,[R]_\alpha A\,.$$

в/ $A \doteqdot \forall x B$. } Разбираются совершенно так же.

г/ $A \doteqdot (t \in Q)$. }

Случай предельного ординала сводится просто к применению редположения индукции.

<u>Лемма 2.2.2.</u> Для всех α , n , если $n[CR]_\alpha A$, $SR(A)[CR]_\alpha A$.

Эта лемма доказывается точно так же.Единственное отличие остоит в том,что на предельном шаге мы применяем предположение ндукции не к какому-то из предшествующих ординалов,а к ним всем местe.

Введем сокращение

$$\models_\alpha A \rightleftharpoons SR(A)\,[R]_\alpha A$$

Символы " $\models_\alpha A$ " будут читаться "истинна на уровне α рмула A ".

Рассмотрим формулу $\neg A \rightleftharpoons (A \supset (0=1))$.

<u>Лемма 2.2.3.</u>

$$\models_{\alpha\oplus1} \neg A \Leftrightarrow \forall n \sim n[CR]_\alpha A \;;$$

$$SR(A)\,[CR]_{\alpha\oplus1} \neg A \Leftrightarrow \forall n \sim n\,[R]_\alpha A \,.$$

Доказательство этой леммы очевидно из определений и лемм о андартной реализации.

Таким образом,истинность $\neg A$ на уровне $\alpha\oplus1$ означает,что уровне α у нас не остаётся даже возможности в дальнейшем дтвердить A . Из леммы 2.2.4 и леммы 2.I.I. /о том,что іствительная реализация всегда является виртуальной/ следует,что таких ординалов α и β , и такой формулы A ,что $\models_\alpha A$, о $\models_{\beta} \neg A$.

В дальнейшем утверждение "$\models_{\alpha 01} \neg A$ мы будем сокращённо аписывать $=\!\!|_{\alpha} A$ и читать "ложна на уровне α формула A ".

Применим теперь разработанный нами аппарат стандартных еализаций к доказательству семантической пригодности полуфор-альной системы типа системы теории множеств Аккермана.

§ 2.3. Полуформальная система ПВ.

Система ПВ будет строиться в языке секвенций над языком Δ .

<u>Определение 2.3.I.</u> Ряд формул языка Δ.

Пустое слово - ряд формул,

Если Γ - ряд формул, A - формула языка Δ , то ΓA - ряд формул языка.

Члены ряда формул.

У пустого ряда нет членов.

Членами ряда ΓA являются члены ряда Γ и формула A .

Два ряда равны,если они отличаются лишь перестановкой членов.
яд <u>замкнут</u>, если все его члены замкнуты.

Секвенция над языком Δ .

Если Γ и Θ - ряды формул языка Δ ,то слово $\Gamma \to \Theta$ азывается <u>секвенцией</u> над языком Δ .

Секвенции $\Gamma \to \Theta$ и $\Gamma' \to \Theta'$ <u>равны</u>,если Γ равно Γ', Θ равно Θ' . Мы будем рассматривать лишь секвенции,со-тавленные из замкнутых формул.

При формулировке аксиом и правил вывода мы не различаем рав-ıе секвенции (т.е. всякая секвенция,равная аксиоме,также есть :сиома; всякое правило вывода,полученное из одного из правил стемы ПВ заменой одной или нескольких секвенций на равные им,

...сть правило вывода системы ПВ).

В дальнейшем $\Gamma, \Theta, \Gamma', \Theta'$ .... будут обозначать ...иды замкнутых формул.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Система ПВ.

АКСИОМЫ: A1. $\Gamma \to \Theta\,(t=u) \quad / \; \mathfrak{z}\llcorner t \lrcorner = \mathfrak{z}\llcorner u \lrcorner \,/.$

A2. $(t=u)\,\Gamma \to \Theta \quad / \; \mathfrak{z}\llcorner t \lrcorner \neq \mathfrak{z}\llcorner u \lrcorner \,/.$

...РАВИЛА ВЫВОДА :

$$\supset\to \quad \frac{\Gamma\to\Theta A \quad B\Gamma\to\Theta}{(A\supset B)\Gamma\to\Theta} \qquad \to\supset \quad \frac{A\Gamma\to\Theta B}{\Gamma\to\Theta(A\supset B)}$$

$$\forall\to \quad \frac{\forall x A \; F^x_t\llcorner A\lrcorner\, \Gamma\to\Theta}{\forall x A\,\Gamma\to\Theta} \qquad \to\forall \quad \frac{\Gamma\to\Theta F^x_{\bar 0}\llcorner A\lrcorner \;\ldots\; \Gamma\to\Theta F^x_{\bar n}\llcorner A\lrcorner \;\ldots}{\Gamma\to\Theta\forall x A}$$

$$\in\to \quad \frac{\rho\llcorner(t\in Q)\lrcorner\,\Gamma\to\Theta}{(t\in Q)\Gamma\to\Theta} \qquad \to\in \quad \frac{\Gamma\to\Theta\,\rho\llcorner(t\in Q)\lrcorner}{\Gamma\to\Theta\,(t\in Q)}$$

В системе правил вывода ПВ участвует одно нефинитное правило: $\to\forall$ /обычно это правило называется ω - правилом или пра...вилом Карнапа/. Здесь мы это правило вывода практикуем "конструк...ивно",т.е. выводы посылок даются ОРФ.

Фактически мы задаём понятие доказуемой секвенции индуктивным ...пределением,подобным определению истинности в языке Π . Как ...удет показано в дальнейшем,эта аналогия действительно имеет место ... помогает нам свести по истинности формулы языка Δ к форму...лам языка Π .

Определение 2.2.4. Секвенция $A_1, \ldots A_k \to B_1 \ldots B_\ell$ ...тинна на уровне α ,если

$$\dashv_\alpha A_1 \dot\vee \ldots \dot\vee \dashv_\alpha A_k \dot\vee \models_\alpha B_1 \dot\vee \ldots \dot\vee \models_\alpha B_\ell$$

истинна на уровне α,

квенция $A_1 \ldots A_k \to$

ли

$\exists_\alpha A_1 \dot{\vee} \ldots \dot{\vee} \exists_\alpha A_k$.

/Здесь мы сводим смысл секвенций над языком $\triangle$ к смыслу фор-
л языка $\triangle$.Так как секвенция остаётся для нас вспомогательным
в значительной мере чисто синтаксическим понятием,мы удовлетво-
іемся таким чисто формальным определением,в какой-то мере соответ-
ствующим классическому истолкованию секвенции/.

В принципе мы могли бы обойтись без секвенций с пустой правой
астью /следуя обычной терминологии,мы будем называть в секвенции
$\Gamma \to \Theta$ Γ - антецедентом,а Θ - сукцедентом/, так как
з таких секвенций невозможно вывести следствие вида $\to A$,
оскольку все правила не увеличивают количества формул в сукцеденте.

Теорема 2.3.

Если секвенция $\to A$ выводима в системе ПВ ,то формула A
еализуема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Сопоставим каждому доказательству в системе ПВ конструктив-
ый ординал,который будем называть высотой этого доказательства.

Высота доказательства,состоящего из одной аксиомы,есть 0. ?

Если высота доказательства посылки однопосылочного есть α,
о высота доказательства его заключения есть $\alpha \oplus 1$.

Если высоты доказательств первой и второй посылок правила $\supset\to$
уть α_1 и α_2, то высота доказательства его заключения есть
$\max(\alpha_1, \alpha_2) \oplus 1$.

Если высоты доказательств секвенций $\Gamma \to \Theta \ulcorner F^x_n \urcorner A \lrcorner$ суть α_n,
высота заключения правила $\to \forall A$ есть $\sup\limits_{n<\omega} \alpha_n \oplus n$

Отношение "секвенция $\Gamma \to \Theta$ равна секвенции $\Gamma' \to \Theta'$" мы будем обозначать $\Gamma \to \Theta \doteq \Gamma' \to \Theta'$.

Слова "истинна A" мы будем сокращённо записывать $\models A$, "ложна A" $\Dashv A$

Индукцией по определению вывода легко доказывается, что высота всякого доказательства есть конструктивный ординал.

Будем доказывать индукцией по построению доказательства следующее предложение: Если у нас есть доказательство $\Gamma \to \Theta$, имеющее высоту α, то истинна на уровне α $\Gamma \to \Theta$.

<u>Базис</u> индукции.

Пусть доказательство имеет высоту 0. Тогда оно состоит из одной лишь аксиомы. И секвенция истинна тривиально.

<u>Шаг</u> <u>индукции</u>. Рассмотрим различные случаи в зависимости от того, какое правило применялось последним.

$\supset \to$. Так как действительная реализуемость монотонно возрастает, а виртуальная реализуемость монотонно убывает, то из того, что посылки правила $\supset \to$ были истинны на уровнях α_1 и α_2, соответственно, следует, что они истинны на уровне $\max(\alpha_1, \alpha_2) \oplus 1$.

По определению истинности секвенции, у нас либо ложна на уровне $\max(\alpha_1, \alpha_2)$ какая-то формула из Γ, либо истинна на том же уровне какая-то формула из Θ, либо истинна на уровне $\max(\alpha_1, \alpha_2)$ A и ложна на уровне $\max(\alpha_1, \alpha_2)$ B. По монотонности $\Dashv_\alpha$ и $\models_\alpha$, мы отсюда заключаем, что $\models_\alpha (A \supset B)$ ии же секвенция $(A \supset B)\,\Gamma \to \Theta$ верна за счёт Γ или Θ.

Остальные правила разбираются совершенно аналогично. Мы разберём лишь правило $\to \forall$.

$\to \forall$. Пусть на уровнях α_n у нас $\models_{\alpha_n} \Gamma \to \Theta A(X|n)$. Тогда либо истинно на уровне α одно из Θ, либо ложно на уровне α одно из Γ, либо при всех α_n $\models_{\alpha_n} A(X|n)$, и, следовательно, $\models_{\alpha} \forall X A$. Следовательно,

$$\models_{\alpha} \Gamma \to \Theta \forall X A \quad .$$

Доказательство теоремы завершено.

Теперь мы рассмотрим обратную теорему, о сводимости реализуемости к выводимости в системе ПВ.

§ 2.4. Реализуемость и доказуемость.

Теорема 2.4.

Если формула A реализуема, то секвенция $\to A$ выводима в теории ПВ.

Доказательство.

Построим вспомогательные алгорифмы.

А-членами называются формулы вида $(B \supset C)$, $(t \in Q)$, $=u)$ и слова вида $\{n \forall X B\}$, где B - формула языка Δ, n - натуральное число.

Ряд А-членов. Λ - ряд А-членов. Если $\mathcal{P}$ - ряд А-членов, A - А-член, то $\mathcal{P}A$ - ряд А-членов.

Помеченный ряд. Если $\mathcal{P}$ и Q - ряды каких-либо объектов, то $\mathcal{P} * Q$ - помеченный ряд этих же объектов.

Помеченная секвенция /редукт/:

Если Φ - помеченный ряд А-членов, Ψ - ряд формул, то $\to \Psi$ - редукт.

Если Φ - ряд А-членов, Ψ - помеченный ряд формул, то $\Phi \to \Psi$ - редукт.

Секвенция данного редукта. $\Gamma \to \Theta$ - секвенция редукта $\Phi \to \Psi$, если она получается из него опусканием символа $*$ и заменой А-членов вида $\{n \forall X B\}$ на $\forall X B$.

$\Phi \to \Psi$ - редукт секвенции $\Gamma \to \Theta$, если $\Gamma \to \Theta$ - секвенция $P \to \Psi$.

Непосредственная редукция редукта $\Phi \to \Psi$ по пути n.

1. $\dot{I}R(\mathcal{P}*(t=u)Q, n) \rightleftharpoons \mathcal{P}(t=u)*Q$
2. $\dot{I}R(\Phi_1 * \to \Psi, n) \rightleftharpoons \Phi_1 \to * \Psi$
3. $\dot{I}R(\Phi \to \Psi_1 *, n) \rightleftharpoons * \Phi \to \Psi$
4. $\dot{I}R(\Phi_1 * (A \supset B)\Phi_2 \to \Psi, 0) \rightleftharpoons \Phi_1 * \Phi_2 \to \Psi A$
5. $\dot{I}R(\Phi_1 * (A \supset B)\Phi_2 \to \Psi, n+1) \rightleftharpoons \Phi_1 \bar{\bar{B}} * \Phi_2 \to \Psi$
6. $\dot{I}R(\Phi_1 * \{k \forall X A\}\Phi_2 \to \Psi, n) \rightleftharpoons \Phi_1 \{k+1 \forall X A\} \overline{\overline{A(X|(k)_1)}} * \Phi_2 \to \Psi$
7. $\dot{I}R(\Phi_1 * (t \in Q)\Phi_2 \to \Psi, n) \rightleftharpoons \Phi_1 \rho_L(t \in Q)_1 * \Phi_2 \to \Psi$
8. $\dot{I}R(\Phi \to \Psi_1 * (A \supset B)\Psi_2, n) \rightleftharpoons \bar{\bar{A}}\Phi \to \Psi_1 B * \Psi_2$
9. $\dot{I}R(\Phi \to \Psi_1 * \forall X A \Psi_2, n) \rightleftharpoons \Phi \to \Psi_1 A(X|n) * \Psi_2$
10. $\dot{I}R(\Phi \to \Psi_1 * (t \in Q)\Psi_2, n) \rightleftharpoons \Phi \to \Psi_1 \rho_L(t \in Q)_1 * \Psi_2$

($\bar{\bar{A}}$ есть $\{0A\}$, если $A \doteq \forall Y C$, и A, в остальных случаях)

Очистка редукта. Алгорифм $\mathfrak{O}\mathfrak{r}$ перерабатывает каждый редукт в секвенцию этого редукта.

Обоснованность секвенции. Алгорифм $\mathfrak{O}\mathfrak{б}$ аннулирует секвенцию $\Gamma \to \Theta$ тогда и только тогда, когда она является аксиомой системы ПВ.

Редукция редукта $\Phi \to \Psi$.

$(R(\Phi \to \Psi, x))$

1. $R(\varphi\to\psi, 0) \rightleftharpoons \varphi\to\psi$
2. $R(\varphi\to\psi, x*[n]) \rightleftharpoons \dot{I}R(R(\varphi\to\psi, x), n)$

$$Q(\varphi\to\psi, x) \rightleftharpoons Об_\llcorner Or_\llcorner R(\varphi\to\psi, x)_\lrcorner{}_\lrcorner$$

Лемма 2.4.I.

Если $\Gamma\to\Theta$ - секвенция $\varphi\to\psi$, и

$$\lambda x Q(\varphi\to\psi, x) \ni 0 \quad ,$$

то $\Gamma\to\Theta$ доказуема в системе ПВ.

Доказательство.

Индукцией по запиранию докажем следующий факт: если

$$\lambda x Q(\varphi\to\psi, x) \ni n \quad ,$$

то $Or_\llcorner R(\varphi\to\psi, n)_\lrcorner$ доказуема в системе ПВ.

Если $Q(\varphi\to\psi, n) \doteq 0$, то $Or_\llcorner R(\varphi\to\psi, n)_\lrcorner$ является аксиомой теории ПВ, по определению.

Если $Q(\varphi\to\psi, n) \dot{\neq} 0$, то разберём I0 случаев, в зависимости от вида $R(\varphi\to\psi, n)$.

Случаи, когда $R(\varphi\to\psi, n)$ имеет вид, перечисленный в пп. I, 2, и 3 определения $\dot{I}R$, тривиальны: секвенция $R(\varphi\to\psi, n*[m])$ есть опять-таки $Or_\llcorner R(\varphi\to\psi, n)_\lrcorner$, и она выводима по предположению индукции.

Остальные случаи сводятся к применению одного из правил вывода системы ПВ к секвенциям, выводимым по предположению индукции. Доказательство леммы закончено.

Правило

$$\Pi \; \frac{\Gamma\to\Theta}{\Gamma'\to\Theta'}$$

в языке секвенций над языком Δ допустимо в системе ПВ, если по каждому доказательству $\Gamma\to\Theta$ мы можем построить доказательство $\Gamma'\to\Theta'$.

Добавим к системе ПВ ещё одно тривиальное правило: правило повторения:

$$\frac{\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta} \quad .$$

Добавим к определению высоты доказательства в системе ПВ ещё один пункт: если α - высота доказательства $\Gamma\to\Theta$, и мы применили правило повторения, то высота получающегося доказательства $\Gamma\to\Theta$ будет $\alpha\oplus 1$.

Ещё три столь же тривиальных правила двойного повторения и бесконечного повторения:

$$D^1\ \frac{\Gamma\to\Theta\quad \Gamma_1\to\Theta_1}{\Gamma\to\Theta}\qquad D^2\ \frac{\Gamma_1\to\Theta_1\quad \Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta}$$

$$D^\infty\ \frac{\Gamma_1\to\Theta_1\ \ldots\ \Gamma\to\Theta\ \ldots\ \Gamma_n\to\Theta_n\ \ldots}{\Gamma\to\Theta}$$

Высота заключения правила $D^1_1 D^2$ определяется по высоте посылок точно так же, как в случае правила $D\Rightarrow$, а правила D^∞ - точно так же, как правила $\to\forall$.

Эти правила не изменяют объема понятия доказуемой в ПВ формулы. Они нужны нам лишь для того, чтобы при доказательстве допустимости некоторых правил вывода мы могли бы заменить в доказательствах опущенные применения правил системы ПВ этими "пустышками", и при этом структура доказательства и его высота сохранились бы. Необходимость их введения связана с крайней слабостью клиниевского отношения порядка. Систему ПВ с добавлением этих правил будем обозначать ПВ*.

Правило Π <u>правильно допустимо</u> в ПВ, если оно допустимо в ПВ и вывод $\Gamma\to\Theta$ в ПВ* имеет ту же высоту, что и вывод $\Gamma'\to\Theta'$.

<u>Лемма 2.4.2.</u> Обращения всех правил вывода системы ПВ, а именно:

$$\frac{(A\supset B)\Gamma\to\Theta}{B\Gamma\to\Theta}\qquad \frac{(A\supset B)\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta A}\qquad \frac{\Gamma\to\Theta(A\supset B)}{A\Gamma\to\Theta B}\qquad \frac{\forall XA\Gamma\to\Theta}{\forall XA\,A(X|t)\Gamma\to\Theta}$$

$$\frac{\Gamma\to\Theta\forall XA}{\Gamma\to\Theta A(X|n)}\qquad \frac{\Gamma\to\Theta(t\in Q)}{\Gamma\to\Theta\, p_t(t\in Q)_1}\qquad \frac{(t\in Q)\Gamma\to\Theta}{p_t(t\in Q)_1\Gamma\to\Theta}$$

правильно допустимы в ПВ.

<u>Доказательство</u>.

Индукция по построению доказательства.

1/. Правило $\dfrac{(A\supset B)\Gamma\to\Theta}{B\Gamma\to\Theta}$

Если $(A\supset B)\Gamma\to\Theta$ есть аксиома, то она является аксиомой за счёт элементарной формулы, и, следовательно, $B\Gamma\to\Theta$ также есть аксиома и доказательство высоты 0.

Если $(A\supset B)\Gamma\to\Theta$ получена применением какого-то правила вывода, и $(A\supset B)$ перенесена из посылок, то доказательство $(A\supset B)\Gamma\to\Theta$ имеет вид

$$\frac{\ldots\ldots S_i \ldots\ldots}{(A\supset B)\Gamma\to\Theta}$$

где S_i - доказательства секвенций $(A\supset B)\Gamma_i\to\Theta_i$. Но по каждому доказательству S_i мы по предположению индукции можем построить доказательство S_i' секвенции вида $B\Gamma_i\to\Theta_i$, имеющее ту же высоту, и ко всем таким доказательствам применить то же самое правило вывода. У нас получится доказательство $(A\supset B)\Gamma\to\Theta$ той же самой высоты, что и исходное доказательство.

Если $(A\supset B)\Gamma\to\Theta$ получена применением правила $\supset\to$ к $(A\supset B)$, то доказательство имеет вид

$$\frac{B\Gamma\to\Theta \qquad \Gamma\to\Theta A}{(A\supset B)\Gamma\to\Theta}\supset\to$$

Доказательства посылок оставляем без изменения, а последнее применявшееся правило $\supset\to$ заменяем на D^1.

Остальные правила из условия леммы 2.4.2 рассматриваются точно так же.

Применение этих допустимых правил, мы будем называть <u>контрприменением</u> правил системы ПВ. Контрприменение одного или нескольких правил системы ПВ оставляет высоту доказательства неизменной.

Теперь разработанный нами аппарат контрприменений можно применить к доказательству следующей леммы:

Лемма 2.4.3. Если $\Gamma \to \Theta$ доказуема в ПВ*, и $\varphi \to \psi$ - редукт $\Gamma \to \Theta$, то

$$\lambda x\, Q(\varphi \to \psi, x) \, 3 \, 0$$

Доказательство.

Будем индукцией по построению доказательства доказывать следующее утверждение:

Если вывод $\Gamma' \to \Theta'$ имеет ту же высоту, что и вывод $\Gamma \to \Theta$, и $\varphi' \to \psi'$ - редукт $\Gamma' \to \Theta'$, то

$$\lambda x\, Q(\varphi' \to \psi', x) \, 3 \, 0 \quad .$$

Базис индукции. Если $\Gamma \to \Theta$ - аксиома, то все доказательства, имеющие ту же самую высоту 0, также состоят из одной аксиомы. А если $\varphi \to \psi$ - редукт аксиомы, то

$$Q(\varphi \to \psi, 0) \dot{=} 0 \quad .$$

Для дальнейшего нам понадобится одно тождество:

$$Q(\varphi \to \psi, x * y) \dot{=} Q(R(\varphi \to \psi, x), y) \quad .$$

Это тождество непосредственно следует из определений алгорифмов Q и R.

Из этого тождества следует, что

$$\lambda x\, Q(\varphi \to \psi, x) \, 3 \, n \Leftrightarrow \lambda x\, Q(R(\varphi \to \psi, n), x) \, 3 \, 0 \, .$$

Сделаем также несколько замечаний относительно самого понятия „запирание":

$$\dot{\exists} n \, \dot{\forall} x \, (lh(x) \dot{=} n \Rightarrow f \, 3 \, y * x) \Rightarrow f \, 3 \, y \quad .$$

Это утверждение легко доказывается индукцией по n.

Теперь подготовлен весь необходимый аппарат для доказательства леммы.

Возьмём произвольное доказательство в ПВ*, имеющее высоту $\ell \neq 0$. Это доказательство не может сводиться к аксиоме. Следовательно, последним применялось какое-то правило вывода ПВ*. Но предположению индукции, у нас для посылок этого правила доказано, что для всех доказательств той же высоты $\lambda x Q(\Phi \to \Psi, x) \geq 0$.

Рассмотрим поочередно правила вывода системы ПВ*.

I/. Правила повторения. Тогда находим посылку этого правила, совпадающую с его заключением, и применяем к её доказательству предположение индукции.

2/ Правило $\supset \to$. Отметим ту формулу вида $(A \supset B)$, к которой было применено это правило. Определим расстояние между членом Ч и $*$ в $\Phi \to \Psi$ $(r(\text{Ч}, \Phi \to \Psi))$.

P1. Если $\Phi \to \Psi$ имеет вид $\Phi' * \Phi'' \text{Ч} \Phi''' \to \Psi$, где Ч - А-член, Φ', Φ'', Φ''' - ряды А-членов, то расстояние между $*$ и Ч есть n, где n - число членов Φ''.

P2. Если $\Phi \to \Psi$ имеет вид $\Phi' * \Phi'' \to \Psi' \text{Ч} \Psi'$, число членов в Φ'' есть n, в Ψ' - k, то

$$r(\text{Ч}, \Phi \to \Psi) \rightleftharpoons n + k + 1 .$$

P3. Если $\Phi \to \Psi$ имеет вид $\Phi' \text{Ч} \Phi'' * \Phi''' \to \Psi$, число членов в Φ''' - n, в Ψ - k, в Φ' - ℓ, то

$$r(\text{Ч}, \Phi \to \Psi) \rightleftharpoons 3n + 2k + \ell + 2 .$$

P4. Если $\Phi \to \Psi$ имеет вид $\Phi \to \Psi' * \Psi'' \text{Ч} \Psi'''$, число членов в Ψ'' - n, то

$$r(\text{Ч}, \Phi \to \Psi) \rightleftharpoons n .$$

P5. Если $\Phi \to \Psi$ имеет вид $\Phi' \text{Ч} \Phi'' \to \Psi' * \Psi''$, число членов в Ψ'' - n, в Φ' - k, то

$$r(\text{Ч}, \Phi \to \Psi) \rightleftharpoons 2n + k + 1 .$$

P6. Если $\Phi \to \Psi$ имеет вид $\Phi \to \Psi' \text{Ч} \Psi'' * \Psi'''$, число членов в Ψ''' - n, в Φ - k, в Ψ' - ℓ, то

$$r(\text{Ч}, \Phi \to \Psi) \rightleftharpoons 2n + k + \ell + 2 .$$

Если $r(\Psi, \Phi\to\Psi) = k > 0$, то при всех n $r(\Psi, iR(\Phi\to\Psi, n)) < k$.

Рассмотрим доказательство $(A\supset B)\Gamma\to\Theta$. Оно имеет вид

$$\frac{\overset{S_1}{B\Gamma\to\Theta} \quad \overset{S_2}{\Gamma\to\Theta A}}{(A\supset B)\Gamma\to\Theta}.$$

К его посылкам можно применить предположение индукции,

А именно, если у нас есть доказательство секвенции вида $\Gamma'\to\Theta'$, имеющее ту же высоту, что и доказательство секвенции $B\Gamma\to\Theta$, ($\Gamma\to\Theta A$, соответственно), и $\Phi'\to\Psi'$ – редукт секвенции $\Gamma'\to\Theta'$, то $\lambda x Q(\Phi'\to\Psi', x) \ni 0$.

Будем доказывать индукцией по $r(A\supset B, \Phi'\to\Psi')$ следующее утверждение: если $\Phi'\to\Psi'$ – редукт секвенции, имеющей вид $(A\supset B)\Gamma'\to\Theta'$ и получающейся из $(A\supset B)\Gamma\to\Theta$ контрприменениями правил вывода системы ПВ, не задевающими формулу $(A\supset B)$,

$$\lambda x Q(\Phi'\to\Psi', x) \ni 0.$$

Пусть $r(A\supset B, \Phi'\to\Psi') = 0$. Тогда у нас $\Phi'\to\Psi'$ имеет вид

$$\Phi_1 * (A\supset B)\Phi_2 \to \Psi'.$$

Следовательно, $Or(R(\Phi'\to\Psi', [0])) \doteq B\Gamma'\to\Theta'$, $Or(R(\Phi'\to\Psi', [n+1]) \doteq \Gamma'\to\Theta' A$. Но тогда $B\Gamma'\to\Theta'$ и $\Gamma'\to\Theta' A$ получаются из $B\Gamma\to\Theta$ и $\Gamma\to\Theta A$ контрприменениями тех же правил вывода, что и $(A\supset B)\Gamma'\to\Theta'$ из $(A\supset B)\Gamma\to\Theta$. Следовательно, по правильной допустимости контрприменений всех правил, у нас найдутся доказательства этих секвенций той же высоты, что и посылок правила $\supset\to$. Следовательно, по предположению индукции,

$$\forall n\, \lambda x Q(R(\Phi'\to\Psi', [n]), x) \ni 0,$$

и,по свойствам функции Q, $\lambda x\, Q(\Phi' \to \Psi', x) \ni 0$.

Шаг индукции. Если $r(A \supset B, \Phi' \to \Psi') > 0$, то в результате редукции $\Phi' \to \Psi'$ у нас получатся редукты, секвенция которых либо та же самая, что у $\Phi' \to \Psi'$, либо получается из $A \supset B\, \Gamma' \to \Theta'$ контрприменением одного из правил вывода системы ПВ, не задевающим $A \supset B$.

Поскольку

$$r(A \supset B, R(\Phi' \to \Psi', [n])) < r(A \supset B, \Phi' \to \Psi'),$$

то к редуктам $R(\Phi' \to \Psi', [n])$ можно применить предположение индукции, и рассудить затем точно так же, как и в случае базиса.

Рассмотрение случая $\supset \to$ завершено. Коротко проведённое доказательство можно резюмировать следующим образом: мы доказываем, что редукция "расколет" на любом пути нужную нам формулу, и "осколки" будут получаться из посылок правила $\supset \to$ контрприменениями правил вывода ПВ.

Все остальные случаи рассматриваются точно так же: ведётся доказательство индукцией по $r(A, \Phi \to \Psi)$, где A - основная формула данного правила вывода. Исключение в каком-то смысле представляет лишь правило $\forall \to$, в котором индукция будет двойной. Рассмотрим это правило.

Пусть доказательство имеет вид

$$\frac{\overset{S}{\forall x A \quad A(x|t)\, \Gamma \to \Theta}}{\forall x A\, \Gamma \to \Theta}.$$

Легко доказать следующую лемму: если $O\tau(\Phi \to \Psi)$ имеет вид $\forall x A\, \Gamma \to \Theta$, то при всяком x $O\tau(R(\Phi \to \Psi, x))$ имеет вид $\forall x A\, \Gamma' \to \Theta'$. В самом деле, единственное правило редукции, задевающее формулу вида $\forall x A$, находящуюся в антецеденте секвенции, приводит к секвенциям вида $\forall x A\, A(x|n)\, \Gamma' \to \Theta'$.

Пусть $?$. m- <u>дефектом</u> кортежа X назовём число $\mu z(z \geqslant x \,\&\, (z)_1 \dot{=} m) \dot{-} x$.

Будем доказывать следующее утверждение: если секвенция редукта $\Phi' \to \Psi'$ получается из $\forall XA\Gamma \to \Theta$ контрприменениями правил вывода системы ПВ, то $\lambda x Q(\Phi' \to \Psi', x)$ ЗО.

Доказательство будет вестись двойной индукцией. В Φ' $\forall XA$ входит в А-член вида $\{k\forall XA\}$. Проведём индукцию по m - дефекту k.

Пусть m- дефект k равен 0. Тогда проведём индукцию по
$$r(\{k\forall XA\}, \Phi' \to \Psi')$$

Пусть $r(\{k\forall XA\}, \Phi' \to \Psi') \dot{=} 0$. Тогда $\Phi' \to \Psi'$ имеет вид $\Phi_1 * \{k\forall XA\}\Phi_2 \to \Psi'$. В соответствии с правилами редукции,
$$R(\Phi' \to \Psi', [n]) \dot{=} \Phi_1\{k+1\forall XA\}\overline{\overline{A(X|(k)_0)}} * \Phi_2 \to \Psi'.$$

Докажем небольшую лемму о допустимости правила подстановки:

<u>Лемма 2.4.4.</u> Если $\zeta\llcorner t \lrcorner \dot{=} \zeta \llcorner u \lrcorner$, то правильно допустимо в ПВ следующее правило:
$$\frac{A(X|t)\,\Gamma \to \Theta}{A(X|u)\,\Gamma \to \Theta}$$

<u>Доказательство</u>. Если $A(X|t)\Gamma \to \Theta$ было аксиомой, то и $A(X|u)\Gamma \to \Theta$ будет аксиомой. Остальные правила вывода разбираются легко, не возникает даже коллизий переменных из-за того, что в ПВ выводятся лишь замкнутые секвенции, и, следовательно, терм u не содержит переменных.

Теперь контрприменениями правил вывода ПВ и применением правила подстановки мы сможем свести секвенцию $\forall XA\, A(X|t)\Gamma \to \Theta$ к секвенции $\forall XA\, A(X|(k)_0)\,\Gamma' \to \Theta'$.

Следовательно, секвенция $\forall XA\, A(X|(k)_0)\Gamma' \to \Theta'$ имеет доказательство той же высоты, что и $\forall XA\, A(X|t)\Gamma \to \Theta$. Применив теперь предположение индукции по построению вывода, заканчиваем доказательство.

Шаг индукции по r. Проводится совершенно аналогично шагу в случае $\supset \to$.

Следовательно, базис индукции по m - дефекту доказан.

Шаг индукции по m - дефекту. Индукция по r. Если $r(\{k\forall XA\}, \Phi' \to \Psi') = 0$, то $\mathcal{C}_2(R(\Phi' \to \Psi', [n]))$ имеет вид

$$\Phi_1^{\times}\{k+1\, \forall XA\}\, A(X|(k)_0) * \Phi_2 \to \Psi'$$

Но, т.к. m -дефект $k > 0$, то m -дефект $k+1$ будет меньше m -дефекта k. Теперь применяем предположение индукции по m -дефекту.

Шаг индукции по r опять-таки имеет точно такой же вид, как и в случае правила $\supset \to$.

Доказательство леммы о редукции закончено. Если бы мы полностью конструктивизировали понятие доказательства в ПВ, отождествив применение правила Карнапа с гёделевым номером ОРФ, выдающей выводы посылок, то мы при помощи доказанных только что двух лемм могли бы построить примитивно-рекурсивную функцию, сопоставляющую каждой секвенции фигуру, которая является её доказательством тогда и только тогда, когда секвенция доказуема в ПВ /"стандартный вывод"/. В отличие от понятия реализуемости, лемма о стандартном выводе ни в одном из пунктов не требует никакой формы ленинградского принципа и доказывается полностью в общей части всех трёх математик. В классической или интуиционистской математике мы можем уточнить понятие вывода по-другому, используя общую концепцию свободно-становящейся последовательности или функции. Но тогда это - доказательство существования стандартного <u>конструктивного</u> доказательства /конструктивного в том смысле,что в правилах Карнапа доказательства посылок даются ПРФ/ для всех интуиционистских /классических/ доказательства в системе ПВ.

Переходим теперь к доказательству самого того утверждения о выводимости всех реализуемых формул,которое служит утверждением теоремы.

<u>Лемма 2.4.5.</u> /Основная лемма о сводимости/.

I. $\models_{\alpha\oplus 1}(A\supset B) \Longleftrightarrow (\dashv_\alpha A \,\dot{\vee} \models_\alpha B)$

2. $\dashv_{\alpha\oplus 1}(A\supset B) \Longleftrightarrow (\models_\alpha A \,\dot{\&} \dashv_\alpha B)$

3. $\models_{\alpha\oplus 1}\forall X A \Longleftrightarrow \dot{\forall} n \models_\alpha A(X|n)$

4. $\dashv_{\alpha\oplus 1}\forall X A \Longleftrightarrow \dot{\exists} n \dashv_\alpha A(X|n)$

5. $\models_{\alpha\oplus 1}(t\in Q) \Longleftrightarrow \models_\alpha \rho_{\llcorner}(t\in Q)_{\lrcorner}$

6. $\dashv_{\alpha\oplus 1}(t\in Q) \Longleftrightarrow \dashv_\alpha \rho_{\llcorner}(t\in Q)_{\lrcorner}$

<u>Доказательство</u>. Если

$$\models_{\alpha\oplus 1}(A\supset B),$$

то

$$\dot{\forall} n\,(n[CR]_\alpha A \Rightarrow \models_\alpha B),$$
$$\exists n\; n[CR]_\alpha A \Rightarrow \models_\alpha B,$$
$$\dashv_\alpha A \,\dot{\vee} \models_\alpha B.$$

Если $\dashv_\alpha A \,\dot{\vee} \models_\alpha B$,то $\dot{\forall} n\,(n[CR]_\alpha A \Rightarrow \models_\alpha B)$ и $\models_\alpha (A\supset B)$, и всё доказано.

Остальные пункты разбираются аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ.

Индукцией по α доказываем утверждение: если $\models_\alpha \Gamma\to\Theta$ и $\Phi\to\Psi$ - редукт $\Gamma\to\Theta$, то $\lambda x\, Q(\Phi\to\Psi, x) \ni 0$.

Пусть $\alpha \doteq 0$. Тогда в Γ есть элементарная ложь или же в Θ - элементарная истина. Следовательно, $Q(\Phi\to\Psi, 0) \doteq 0$.

Пусть $\alpha \dot{\neq} 0$. Тогда у нас не может не существовать ложного на уровне α члена Γ или же истинного на уровне α члена Θ. Пусть мы нашли такой член. В зависимости от его вида и расположения могут быть 9 случаев.

1. $\Gamma\to\Theta$ имеет вид $(t=u)\Gamma'\to\Theta'$, $\mathfrak{z}\llcorner t\lrcorner \dot{\neq} \mathfrak{z}\llcorner u\lrcorner$, или же $\Gamma\to\Theta'(t=u)$, $\mathfrak{z}\llcorner t\lrcorner \doteq \mathfrak{z}\llcorner u\lrcorner$. В этом случае опять-таки $Q(\Phi\to\Psi, 0) \doteq 0$.

2. $\Gamma\to\Theta$ имеет вид $(A\supset B)\Gamma'\to\Theta$, и $\dashv_\alpha (A\supset B)$. Действуем индукцией по $r(A\supset B, \Phi\to\Psi)$. Если $r(A\supset B, \Phi\to\Psi) \doteq 0$, то секвенции $R(\Phi\to\Psi, [n])$ имеют вид $B\Gamma'\to\Theta$ или $\Gamma'\to\Theta A$. Но, по лемме 2.4.5, если $\alpha \doteq \beta\oplus 1$, то эти секвенции истинны уже на уровне β, и к ним можно применить предположение индукции. Если же α - предельный, то опять-таки $\dot{\exists}\beta<\alpha \models_\beta \Gamma\to\Theta$ и можно применить предположение индукции. Если $r(A\supset B, \Phi\to\Psi) > 0$, то все секвенции редукций $\Phi\to\Psi$ получаются контрприменением правила, не задевающего $(A\supset B)$, или же просто копированием $\Gamma\to\Theta$. И в том и в другом случае секвенция остаётся истинной на уровне α, а расстояние $r(A\supset B, \Phi\to\Psi)$ уменьшается.

Отсюда видно, что рассуждения, применяемые в этом доказательстве, совершенно аналогичны рассуждениям, применявшимся при доказательстве леммы 2.4.3. Точно так же мы рассуждаем и во всех остальных случаях.

Теперь мы видим, что из предположения индукции следует, что $\lambda x\, Q(\varphi \to \psi, x)\ 3\ 0$.

Теперь, по лемме 2.4.1. мы видим, что $\Gamma \to \Theta$ доказуема в ПВ.

Доказательство теоремы завершено.

Следствие. Если $\models_{\alpha} A$, то $\dot{\exists} \beta < \omega_1 \models_{\beta} A$.

Следовательно, при определении реализуемости достаточно было ограничиться конструктивными ординалами Клини.

§ 2.5. Метаматематика нашей работы.

Потому, что с самого начала работы было декларировано, что все методы, используемые в ней, достаточно просты, необходимо исследовать метаматематику, в рамках которой проводятся все наши рассуждения.

Рассмотрим следующую теорию. Возьмём язык арифметики и добавим к нему следующие правила порождения формул:

P1. Если P - непустое слово в алфавите $\{p\}$, t - терм, то $(P)(t)$ - формула.

Формулы, построенные при помощи обычных правил порождения и правила P1, будем называть чистыми.

Слова вида (P), где $P \sqsupset p$, $P \neq \Lambda$, мы будем называть предикатными буквами и обозначать $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ ... . Они могут интерпретироваться как свободные предикатные переменные.

P2. Если A - чистая формула, содержащая лишь одну предикатную букву $\mathcal{P}$ и лишь одну свободную переменную x , t - терм, то $(iA)(t)$ - формула.

Слова вида (iA) мы будем называть индуктивными свойствами .

Теперь определим формальную теорию, в которой формализуются все наши рассуждения.

<u>Аксиомы</u>. Аксиомы логики предикатов, арифметики и математической индукции для всех формул.

<u>Правила вывода</u>. Modus ponens, правила Бернайса и правила индуктивного заключения:

$$\text{iND1.}\quad \frac{\dot\forall x(\mathcal{P}(x)\Rightarrow Q(x))\,\&\,A(\mathcal{P},x)\Rightarrow A(Q,x)}{A((iA),t)\Rightarrow(iA)(t)}$$

$$\text{iND2.}\quad \frac{\dot\forall x(\mathcal{P}(x)\Rightarrow Q(x))\,\&\,A(\mathcal{P},x)\Rightarrow A(Q,x)}{\dot\forall x(A(\lambda y\,B(y),x)\Rightarrow B(x))\Rightarrow((iA)(x)\Rightarrow B(x))}.$$

/ здесь мы употребляем знаки содержательного символизма потому, что эта теория предназначена для формализации наших содержательных рассуждений и весь последующий и предыдущий текст может равным образом пониматься и как сокращённая запись формальных доказательств в этой теории, и как содержательные рассуждения/. Здесь $\lambda y\,B(y)$ - не новый объект языка, а просто формула B с отмеченной переменной y, которая подставляется вместо $\mathcal{P}$ следующим образом: формулы вида $\mathcal{P}(t)$ заменяются на $B(t)$, а для того, чтобы произвести подстановку в сложную формулу, мы производим подстановку B вместо всех её подформул такого вида и переименование связанных переменных во избежание коллизии.

Первое правило разрешает нам доказывать индуктивные свойства "поступенчато", на основе их определяющего свойства. В частности, если формула A имеет вид

$$f(x)\dot=0\ \dot\vee\ \dot\forall y\,\mathcal{P}(x*[y])$$

то $ind\,1$ разрешает шаги доказательства вида

$$\dot\forall y\,(iA)(x*[y])\Rightarrow(iA)(x),\quad f(x)\dot=0\Rightarrow(iA)(x),$$

Второе правило утверждает "минимальность" индуктивного
свойства (iA) среди всех свойств, удовлетворяющих условию A.
Если рассмотреть эту теорию с классической логикой, то известно [redacted]
[redacted], что по своей выразительной силе она эквивалентна ана-
лизу с Π^1_1 - правилом свёртки. С помощью обычной погружаю-
щей операции / она применяется и к тем формулам A, которые
входят в индуктивные свойства/, можно погрузить теорию индуктив-
ных определений с классической логикой в теорию индуктивных
определений с интуиционистской логикой. Этим доказывается равно-
непротиворечивость классической и интуиционистской теорий ин-
дуктивных определений.

Рассматривавшиеся в первых параграфах этой главы трансфи-
нитно-рекурсивные определения сводятся с индуктивным следующим
образом:

/Здесь и в дальнейшем мы свободно пользуемся свойствами пар
чисел, слов и т.д., поскольку все такие высказывания при помощи
известной техники гёделевской нумерации можно свести к выска-
зываниям о числах/.

Возьмём следующее свойство $\mathcal{A}(\mathcal{P}, [n, S, \alpha])$, буквально копирующее пункты определение реализуемости:

$$\dot{\exists} t\, \dot{\exists} u\, (S \doteq \vDash(t=u) \mathbin{\dot{\&}} \zeta_\llcorner t_\lrcorner \doteq \zeta_\llcorner u_\lrcorner \vee S \doteq \dashv(t=u) \mathbin{\dot{\&}} \zeta_\llcorner t_\lrcorner \dot{\neq} \zeta_\llcorner u_\lrcorner)\ \dot{\vee}$$

$$\dot{\exists} \beta\, (\alpha \doteq 2^\beta \mathbin{\dot{\&}} (\exists B C (S \doteq \vDash(B \supset C) \mathbin{\dot{\&}}$$

$$\dot{\forall} m (\sim \mathcal{P}([m, \dashv B, \beta]) \Rightarrow !\langle n\rangle(m) \mathbin{\dot{\&}} \mathcal{P}([\langle n\rangle(m), \vDash C, \beta])$$

$$S \doteq \dashv(B \supset C) \mathbin{\dot{\&}} \dot{\exists} m (\mathcal{P}([m, \vDash B, \beta]) \mathbin{\dot{\&}} (!\langle n\rangle(m) \Rightarrow \mathcal{P}([\langle n\rangle(m), \dashv C, \beta]))\ \dot{\vee}$$

$$\dot{\vee}\ \dot{\exists} B X (S \doteq \vDash \forall X B \mathbin{\dot{\&}} \dot{\forall} m (!\langle n\rangle(m) \mathbin{\dot{\&}} \mathcal{P}([\langle n\rangle(m), \vDash B(X|m), \beta]))\ \dot{\vee}$$

$$S \doteq \dashv \forall X B \mathbin{\dot{\&}} \dot{\exists} m (!\langle n\rangle(m) \Rightarrow \mathcal{P}([\langle n\rangle(m), \dashv B(X|m), \beta]))$$

$$\dot{\vee}\ \dot{\exists} t Q (S \doteq \vDash(t \in Q) \mathbin{\dot{\&}} \mathcal{P}([f^1_n(0), \vDash \rho_2 \llcorner(t \in Q)_\lrcorner, \beta])\ \dot{\vee}$$

$$S \doteq \dashv(t \in Q) \mathbin{\dot{\&}} \mathcal{P}([f^1_n(0), \dashv \rho_2 \llcorner(t \in Q)_\lrcorner, \beta])))$$

$$\dot{\vee}\ \dot{\exists} e\, (\alpha \doteq 3 \cdot 5^e \mathbin{\dot{\&}} \dot{\exists} m\, \mathcal{P}([n, S, f^1_e(m)]))$$

Легко видеть, что $(i\mathcal{A})([n, \models A, \alpha])$ соответствует $n[CR]_\alpha A$ и $n[R]_\alpha A$, а для того, чтобы представить понятие ...хранить монотонность $\mathcal{A}$, его пришлось представить как $\sim(i\mathcal{A})([n, =\!| A, \alpha])$.

При интуиционистской логике, однако, средств выполнить такое ...ведение трансфинитно-рекурсивных определений к индуктивным не ...идно.

В связи с этим мы рассмотрим ещё одну теорию - интуицио...истский индуктивно-рекурсивный анализ. Язык этой теории образу...тся из языка теории индуктивных определений добавлением одно...естного предикатного символа $\mathcal{O}$.

Аксиомы теории - интуиционистская логика, аксиомы арифметики, ...атематическая индукция, аксиомы, описывающие свойство "быть кон...труктивным ординалом":

$$1.\ \mathcal{O}(0) \dot{\&} (\mathcal{O}(y) \Rightarrow \mathcal{O}(2^y)) \dot{\&}$$

$$\forall n (\mathcal{O}(f^1_y(n)) \dot{\&} f^1_y(n) \ll f^1_y(n+1)) \Rightarrow \mathcal{O}(3 \cdot 5^y)).$$

$$2.\ \forall y (A(0) \dot{\&} (A(y) \Rightarrow A(2^y)) \dot{\&}$$

$$\forall n (A(f^1_y(n)) \dot{\&} f^1_y(n) \ll f^1_y(n+1)) \Rightarrow A(3 \cdot 5^y)) \Longrightarrow$$

$$\forall y (\mathcal{O}(y) \Rightarrow A(y))$$

схема аксиом трансфинитной рекурсии:

(A - формула, содержащая единственную предикатную букву - $\mathcal{P}$, и единственную свободную переменную - x).

$$(iA)(n) \Leftrightarrow A(\lambda x.\,(iA)(x) \dot{\&} x \ll n,\ n) \dot{\&} \mathcal{O}(n)$$

В случае классической логики теория индуктивных определений ...теория трансфинитной рекурсии эквивалентны друг другу. ...случае интуиционистской логики они равнонепротиворечивы, но ...своей выразительной силе, судя по всему, различны: есть понятие выразимые в одной теории,для которых не видно средств выразить их в другой теории.Это один из камней преткновения при "конструктивной" интерпретации объектов нашего порядка сложности. Однако более фундаментальным средством являются индуктивные определения: теория трансфинитной рекурсии вынуждена использовать индуктивное определение свойства "быть конструктивным ординалом".

В дальнейшем определяемые трансфинитной рекурсией свойства, если не оговорено противное,будут выразимы как в той,так и в другой теории.

§ 2.6. Язык Δ и язык Π.

Сделаем два замечания по поводу истинности в языке Δ и в языке Π.

Теорема 2.6. Для каждой формулы языка Δ A найдётся формула языка Π B,такая,что

$$\models A \Longleftrightarrow \models_{\Pi} B \quad .$$

Доказательство. Согласно леммам § 2.4,доказуемо в ПВ $\to A$ тогда и только тогда,когда

$$\lambda x\, Q(* \to A, x)\, 3\, 0 \quad .$$

Согласно теоремам главы I,у нас найдётся такая формула языка Π B ,что

$$\models_{\Pi} B \Longleftrightarrow \lambda x\, Q(* \to A, x)\, 3\, 0 .$$

Согласно следствию из теоремы 2.4,у нас

$$\models A \Longleftrightarrow \text{доказуемо в ПВ} \to A \quad .$$

Доказательство завершено.

Лемма 2.6.I. Для каждой формулы B языка Π можно построить формулу A языка Δ ,такую,что

$$\models A \Longleftrightarrow \models_{\Pi} B \quad .$$

Очевидна.

Следствие. Для каждого предикатора M языка Δ найдётся предикатор N языка Π такой, что

$$\models (n \in M) \Leftrightarrow \models_{\Pi} (n \in N) \; .$$

И обратно, для каждого предикатора N языка Π найдётся предикатор M языка Δ, такой, что

$$\models (n \in M) \Leftrightarrow \models_{\Pi} (n \in N) \; .$$

Однако истинность в языке Δ не удаётся свести к истинности в языке Π без потерь. Ложность получившейся формулы языка Π не даёт нам никаких сведений о ложности исходной формулы языка Δ. На рисунке это можно проиллюстрировать следующим образом:

Вопрос о сводимости формул языка Δ друг к другу с сохранением как истинности, так и ложности, будет рассмотрен в главе 3.

§ 2.7. Индуктивные определения и язык Δ.

Лемма 2.7.I. /Основная лемма о сводимости/

I. $\models (t = u) \Leftrightarrow \zeta\llcorner t \lrcorner \dot{=} \zeta\llcorner u \lrcorner$

2. $\dashv (t = u) \Leftrightarrow \zeta\llcorner t \lrcorner \dot{\neq} \zeta\llcorner u \lrcorner$

3. $\models (A \supset B) \Leftrightarrow \dashv A \mathbin{\dot{\vee}} \models B$

4. $\dashv (A \supset B) \Leftrightarrow \models A \mathbin{\dot{\&}} \dashv B$

5. $\models \forall X A \Leftrightarrow \dot{\forall} n \models A(X|n)$

6. $\dashv \forall X A \Leftrightarrow \dot{\exists} n \dashv A(X|n)$

7. $\models (t \in Q) \Leftrightarrow \models \rho\llcorner (t \in Q) \lrcorner$

8. $\dashv (t \in Q) \Leftrightarrow \dashv \rho\llcorner (t \in Q) \lrcorner$

Доказательство тривиально, по определению $\models A$ и $\dashv A$.

<u>Определение 2.7.</u> "Классическая семантика языка Δ."

Определим истинность и ложность формул языка Δ одновременным индуктивным определением:

1. $\mathfrak{z}_{\llcorner} t_{\lrcorner} \dot{=} \mathfrak{z}_{\llcorner} u_{\lrcorner} \Rightarrow \models^{K} (t=u)$

2. $\mathfrak{z}_{\llcorner} t_{\lrcorner} \dot{\neq} \mathfrak{z}_{\llcorner} u_{\lrcorner} \Rightarrow \dashv^{K} (t=u)$

3. $\dfrac{\models^{K} B \,\dot{\vee}\, \dashv^{K} A}{\models^{K} (A \supset B)} \qquad \dfrac{\models^{K} A \,\dot{\&}\, \dashv^{K} B}{\dashv^{K} (A \supset B)}$

4. $\dfrac{\dot{\forall} n \models^{K} A(x|n)}{\models^{K} \forall x A} \qquad \dfrac{\dot{\exists} n \dashv^{K} A(x|n)}{\dashv^{K} \forall x A}$

5. $\dfrac{\models^{K} p_{\llcorner}(t \in Q)_{\lrcorner}}{\models^{K} (t \in Q)} \qquad \dfrac{\dashv^{K} p_{\llcorner}(t \in Q)_{\lrcorner}}{\dashv^{K} (t \in Q)}$

<u>Теорема 2.7.</u>

$$\models^{K} A \Leftrightarrow \models A$$
$$\dashv^{K} A \Leftrightarrow \dashv A$$

Доказательство немедленно следует из теоремы 2.5 и основной леммы о сводимости.

Таким образом, "классическая" предикативная семантика и реализуемость для формул языка Δ совпадают, и в дальнейшем мы можем использовать определение 2.7, как более простое.

где же Теорема 2.5

ЧАСТЬ 3.

В этой части работы будет исследована структура формул языка Δ, они будут расположены в иерархию по числу перемен кванторов, обобщающую известную иерархию Клини-Мостовского.

Вначале введём некоторые обычные определения:

$$\neg A \rightleftharpoons (A \supset (0=1)) \quad ,$$

$$A \& B \rightleftharpoons \neg (A \supset \neg B) \quad ,$$

$$A \vee B \rightleftharpoons (\neg A \supset B) \quad ,$$

$$A \equiv B \rightleftharpoons (A \supset B) \& (B \supset A) \quad ,$$

$$\exists X A \rightleftharpoons \neg \forall X \neg A \quad .$$

<u>Лемма 3.0.1</u>.

$$\models A \Leftrightarrow \;=\!\!| \neg A \quad ;$$

$$=\!\!| A \Leftrightarrow \;\models \neg A \quad ;$$

$$\models A \,\dot{\&}\, \models B \Leftrightarrow \;\models A \& B \quad ;$$

$$=\!\!| A \,\dot{\vee}\, =\!\!| B \Leftrightarrow \;=\!\!| A \& B \quad ;$$

$$\models A \,\dot{\vee}\, \models B \Leftrightarrow \;\models A \vee B \quad ;$$

$$=\!\!| A \,\dot{\&}\, =\!\!| B \Leftrightarrow \;=\!\!| A \vee B \quad ;$$

$$(\models A \,\dot{\&}\, \models B) \,\dot{\vee}\, (=\!\!| A \,\dot{\&}\, =\!\!| B) \Leftrightarrow \;\models A \equiv B \quad ;$$

$$(\models A \,\dot{\&}\, =\!\!| B) \,\dot{\vee}\, (=\!\!| A \,\dot{\&}\, \models B) \Leftrightarrow \;=\!\!| A \equiv B \quad ;$$

$$\dot{\exists} n \models A(X|n) \Leftrightarrow \;\models \exists X A \quad ;$$

$$\dot{\forall} n =\!\!| A(X|n) \Leftrightarrow \;=\!\!| \exists X A \quad .$$

Доказательство тривиально.

Таким образом, для формул языка Δ сохраняются обычные правила присвоения истинности и ложности.

В части 2 у нас были приведены примеры бессмысленных формул языка Δ. Легко индукцией по построению формул языка исчисления предикатов доказать, что при замещении предикатных символов любой формулы исчисления предикатов бессмысленными формулами языка Δ у нас получится бессмысленная формула языка Δ.

В виде таблиц истинности логику языка можно представить следующим образом:

$\supset$	И	Λ	Б
И	И	Λ	Б
Λ	И	И	И
Б	И	Б	Б

$\vee$	И	Λ	Б
И	И	И	И
Λ	И	Λ	Б
Б	И	Б	Б

&	И	Λ	Б
И	И	Λ	Б
Λ	Λ	Λ	Λ
Б	Б	Λ	Б

$\neg$	
И	Λ
Λ	И
Б	Б

$\equiv$	И	Λ	Б
И	И	Λ	Б
Λ	Λ	И	Б
Б	Б	Б	Б

$\forall$	
-И-И-	И
-Λ-И-	Λ
Λ-Б-	Λ
Λ-Б-	Λ
Б-И-	Б
Б-Б-	Б
Λ-Λ-	Λ

$\exists$	
И-И-И-	И
Λ-И-Λ-	И
Б-И-Λ-	И
Б-И-Б-	И
Б-Λ-Б-	Б
Б-Б-Б-	Б
Λ-Λ-Λ-	Λ

Таким образом, мы получаем минимальную трёхзначную логику. еория множеств, основанная на этой логике, впервые была построе-а Аккерманом. При наличии некоторого подобия теории множеств ккермана и рассматриваемой теории существенно отличается объект сследования и метод исследования: здесь изучаются вопросы опреелимости, а сама теория задаётся не формальной или полуформальой системой, а семантически.

В заключение этго введения будет сформулирована ещё одна столь же тривиальная лемма, показывающая, что наша семантика ни в коем случае не приводит к классически неприемлемым следствиям.

Лемма 3.0.2. (Предикатная непротиворечивость).

Пусть каждому предикатному символу $\mathcal{P}(x_1 \ldots x_n)$ из числа входящих в формулу $\mathfrak{A}$ исчисления предикатов сопоставлена формула языка Δ $A(x_1, \ldots, x_n)$, не содержащая никаких свободных переменных, кроме отмеченных. Примером в языке Δ замкнутой формулы исчисления предикатов $\mathfrak{A}$ называется формула языка Δ, получающаяся из $\mathfrak{A}$ заменой каждой элементарной формулы $\mathcal{P}(y_1 \ldots y_n)$ на $A(x_1 \ldots x_n \mid y_1 \ldots y_n)$, и стандартной интерпретацией логических символов $\neg$, $\vee$, $\&$, $\exists$.

Если в исчислении предикатов выводима $\mathfrak{A}$, то всякий пример $\mathfrak{A}$ в языке Δ не может быть ложен.

Если в исчислении предикатов выводимо $\neg\mathfrak{A}$, то всякий пример $\mathfrak{A}$ в языке Δ не может быть истинен.

Доказательство. Легко проводится индукцией по выводу в исчислении предикатов.

§ 3. I. Спаривание.

В этом параграфе речь пойдёт о приведении формул языка Δ к некоторому аналогу понятия предварённой нормальной формы. Однако для этого нам сначала понадобится доказать одну важную структурную теорему.

Теорема 3.I. Если множества $\{n \mid \vDash n \in N\}$ и $\{n \mid \vDash n \in M\}$ не пересекаются, то существует предикатор K языка Δ, такой, что

$$\vDash n \in K \Leftrightarrow \vDash n \in M,$$

$$\Dashv n \in K \Leftrightarrow \vDash n \in N.$$

<u>Доказательство</u>,

Согласно теоремам главы 2 ,мы можем всякой формуле A языка Δ равномерно примитивно-рекурсивно сопоставить такую ПРФ f , что,если $f(X) \doteq 0$, то и $f(X*[n]) \doteq 0$ и

$$\models A \Longleftrightarrow f \ni 0 .$$

Эту ПРФ мы будем в дальнейшем называть запиранием,сопряжённым к A , и обозначать f_A .

Рассмотрим ПРФ

$$f(x,y) \rightleftharpoons \lambda x n . f(n \in M)(x) ,$$

$$g(x,y) \rightleftharpoons \lambda x n . f(n \in N)(x) .$$

С помощью этих ПРФ по теореме о неподвижной точке Клини построим предикатор K .

Через $|X|_1$ и $|X|_2$ мы будем обозначать соответственно кортеж членов кортежа X ,стоящих на нечётных местах,и кортеж членов кортежа X ,стоящих на чётных местах.

Построим ПРФ $h_e(n,m)$:

1. $lh(n)$ - чётна.

$$h_e(m,n) \rightleftharpoons \begin{cases} \{\!\{ 9x(0=0) \}\!\} , & f(m,|n|_2) \doteq 0 . \\ \{\!\{ 9x \exists x (0 \in \langle e,2 \rangle (m, n*[x])) \}\!\} , & f(m,|n|_2) \not\doteq 0 . \end{cases}$$

2. $lh(n)$ - нечётна.

$$h_e(m,n) \rightleftharpoons \begin{cases} \{\!\{ 9x(0=1) \}\!\} , & g(m,|n|_1) \doteq 0 . \\ \{\!\{ 9x \forall x (0 \in \langle e,2 \rangle (m, n*[x])) \}\!\} , & g(m,|n|_1) \not\doteq 0 . \end{cases}$$

По теореме Клини о неподвижной точке подберём e^* таким образом,что

$$h_{e^*}(x,y) \doteq f^2_{e^*}(x,y) .$$

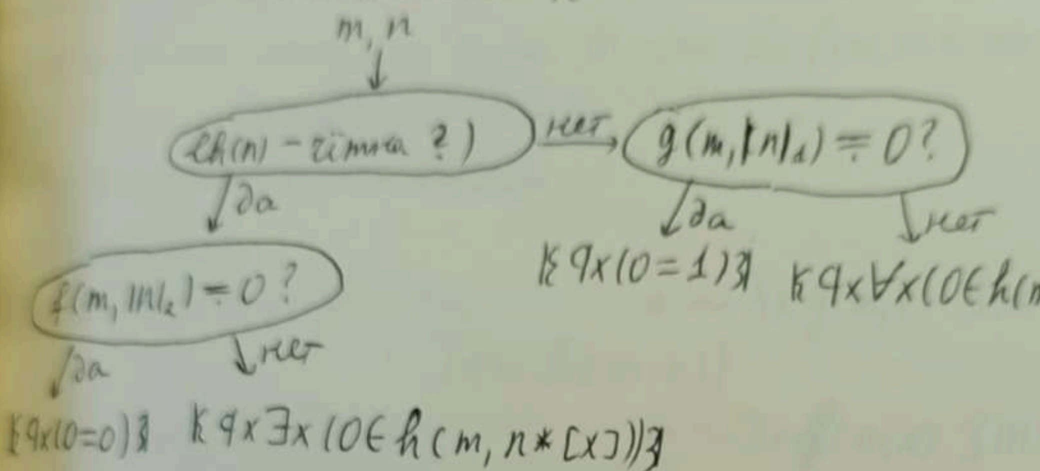
Положим теперь $h \rightleftharpoons h_{e^*}$.

Принцип построения h можно пояснить следующим образом:

h группирует подтверждения истинности $(m\in N)$ под знаком $\forall$, подтверждения истинности $(m\notin N)$ заменяет на ложь и группирует под знаком $\exists$.

$K \rightleftharpoons qx(0\in h(x,0))$.

Схема действия h :



<u>Лемма 3.I.I</u>. (i) Если $\vDash 0\in h(m,n)$, то $\lambda x f(m,x) \ni |n|_2$; (ii) Если $\Dashv 0\in h(m,n)$, то $\lambda x\, g(m,x) \ni |n|_1$.

<u>Доказательство</u>.

Индукция по определению истинности.

(i) Пусть $h(m,n) \doteq \ulcorner qx(t=u)\urcorner$. Тогда, если $\zeta_1 t \doteq \zeta_1 u$, то по построению h , $h(m,n) \doteq \ulcorner qx(0=0)\urcorner$, и, следовательно, $f(m,|n|_2) \doteq 0$, и

$$\lambda x f(m,x) \ni |n|_2$$

Пусть $h(m,n) \doteq \ulcorner qx\forall x A\urcorner$. Тогда, по построению h , $A \doteq (0\in h(m, n*[x]))$, и $lh(n)$ – нечётно.

Предположение индукции выглядит следующим образом: при всех k , если истинно $A(x|k)$, то $\lambda x f(m,x) \ni |n|_2 * [k]$.

Или при всех k $\vDash A(x|k)$, то при всех k $\lambda x f(m,x) \ni |n|_2 * [k]$, и $\lambda x f(m,x) \ni |n|_2$.

Следовательно, если $\models \forall X A$,то $\lambda x f(m,x)\, 3\, |n|_2$.

Пусть $h(m,n) \doteq \ulcorner q x \exists x A \urcorner$.Тогда,по построению, $A \doteq (0 \in h(m, n * [x]))$, и $lh(n)$ - чётна.Следовательно, при любом x $|n*[x]|_2 \doteq |n|_2$. Если $\models (0 \in h(m,n))$,то существует такое k,что $\models A(X|k)$,следовательно,по предположению индукции,существует такое k ,что $\lambda x f(m,x)\, 3\, |n*[k]|_2$,и

$$\lambda x f(m,x)\, 3\, |n|_2 .$$

(ii) разбирается двойственно.

Лемма 3.I.2.

(i) Если $\lambda x f(m,x)\, 3\, |n|_2$ и $\sim \lambda x g(m,x)\, 3\, |n|_1$,то

$$\models (0 \in h(m,n))$$

(ii) Если $\lambda x g(m,x)\, 3\, |n|_1$ и $\sim \lambda x f(m,x)\, 3\, |n|_2$,то

$$\dashv (0 \in h(m,n)) .$$

Доказательство.

(i). Индукция по понятию запирания для f.

Пусть $f(m,|n|_2) \doteq 0$. Тогда,по свойству сопряжённого запирания,при каждом $x \geqslant |n|_2$, $f(m,x) \doteq 0$.

Если $lh(n)$ - чётно,то,по построению h ,

$$h(m,n) \doteq \ulcorner q x (0=0) \urcorner ,$$

$$\models 0 \in h(m,n) .$$

Если $lh(n)$ - нечётно,то,т.к. $\sim \lambda x g(m,x)\, 3\, |n|_1$, в частности, $g(m,|n|_1) \neq 0$, и $h(m,n) \doteq \ulcorner q x \forall x (0 \in h(m, n*[x])) \urcorner$

Но $|n*[x]|_2 \doteq |n|_2 * [x]$, и при всех x

$$h(m,n*[x]) \doteq \ulcorner q x (0=0) \urcorner .$$

Следовательно, $\models (0 \in h(m,n))$.

Пусть $\forall x \lambda y f(m,y)\, 3\, |n|_2 * [x]$ и $f(m,|n|_2) \neq 0$.

Тогда могут представиться два случая:

I. $lh(n)$ - чётно. Тогда

$$h(m,n) \doteq \ulcorner q x \exists x (0 \in h(m, n*[x])) \urcorner .$$

Но $lh(n*[x])$ нечётна, и, поскольку $\sim \lambda y g(m,y) 3 |n|_1$,

то, в частности, $\exists k \sim \lambda y g(m,y) 3 |n|_1 * [k]$,

тогда

$h(m, n*[k]) \doteq \{\forall x \forall x (0 \in h(m, n*[k]*[x]))\}$,

и, по предположению индукции, при всех x

$$\models (0 \in h(m, n*[k]*[x]))$$

Следовательно, $\models 0 \in h(m, n*[k])$

$$\models 0 \in h(m, n) \quad .$$

2. $lh(n)$ - нечётна.

$g(m, |n|_1) \neq 0$, следовательно,

$$\{h(m,n) \doteq \{\forall x \forall x (0 \in h(m, n*[x]))\} \quad .$$

По предположению индукции, для всех k

$$\models 0 \in h(m, n*[k]) \quad .$$

Значит, $\models 0 \in h(m, n)$.

ii) доказывается двойственно.

Следовательно, если $\models (n \in M)$ и $\sim \models (n \in N)$, то $\models (n \in K)$, и если $\models (n \in N)$ и $\sim \models (n \in M)$, то $\dashv (n \in K)$, но, т.к. $\models (n \in M)$ и $\models (n \in N)$ несовместимы, то

$$\models (n \in M) \Rightarrow \models (n \in K) \quad ,$$

$$\models (n \in N) \Rightarrow \dashv (n \in K) \quad .$$

И по лемме 3.1.I,

$$\models (n \in M) \Leftrightarrow \models (n \in K) \quad ,$$

$$\models (n \in N) \Leftrightarrow \dashv (n \in K) \quad .$$

Теорема 3.I. полностью доказана.

Она показывает, что в языке Δ любые две допустимые непересекающиеся области истинности и ложности могут быть объединены в одной формуле. Она также даёт некоторый аналог понятия предварённой формы для формул языка Δ . Сформулируем точно понятие предварённой формулы языка Δ .

Определение 3.I.I. Кратные расшифровки.

1. $\rho^{0}\llcorner A\lrcorner \rightleftharpoons A$.
2. Если $\rho^{x}\llcorner A\lrcorner \doteqdot (t\in Q)$,то
   $\rho^{x*[n]}\llcorner A\lrcorner \rightleftharpoons \rho\llcorner\rho^{x}\llcorner A\lrcorner\lrcorner$.
3. Если $\rho^{x}\llcorner A\lrcorner \doteqdot \forall X B$,то
   $\rho^{x*[n]}\llcorner A\lrcorner \rightleftharpoons B(X|n)$.
4. Если $\rho^{x}\llcorner A\lrcorner \doteqdot \exists X B$,то
   $\rho^{x*[n]}\llcorner A\lrcorner \rightleftharpoons B(X|n)$.
5. Если $\rho^{x}\llcorner A\lrcorner \doteqdot (t=u)$,то $\rho^{x*[n]}\llcorner A\lrcorner \rightleftharpoons \rho^{x}\llcorner A\lrcorner$.
6. Если $\rho^{x}\llcorner A\lrcorner \doteqdot (B\supset C)$,то $\rho^{x*[n]}\llcorner A\lrcorner \rightleftharpoons \rho^{x}\llcorner A\lrcorner$.

/ $(B\supset C)$ не имеет вида $((\forall X D\supset(0=1))\supset(0=1))$ /.

Определение 3.I.2. Формула A - предварённая,если $\rho^{x}\llcorner A\lrcorner$ при всяком x имеет один из видов 1 - 5.

Это - аналог обычного понятия предварённой формулы: на каждом пути расшифровки у нас сначала идут кванторы $\forall$ и $\exists$, перемежающиеся со знаками $\in$ и ч , а затем,возможно,элементарные формулы.

Определение 3.I.3. Будем говорить,что формула A - усиление формулы B ,если

$$\models B \Rightarrow \models A ,$$
$$\Dashv B \Rightarrow \Dashv A .$$

Будем говорить,что формула A полностью эквивалентна формуле B ,если

$$\models B \Leftrightarrow \models A ,$$
$$\Dashv B \Leftrightarrow \Dashv A .$$

Отношение " A - усиление B " будем записывать $A \rightrightarrows B$, а отношение " A - полностью эквивалентна B " будем записывать $A \leftrightarrows B$.

<u>Следствие.</u> По каждой формуле A можно примитивно-рекурсивно построить полностью эквивалентную ей предварённую формулу B.

Следующие параграфы посвящены детальному изучению структуры предварённых формул.

§ 3.2. Отделимость.

Определим отношения " формула A имеет α перемен кванторов", и обобщение арифметических классов Σ^0_n и Π^0_n.

Трансфинитной рекурсией определим понятия " $A \in \Sigma^\Delta_\alpha$ " и " $A \in \Pi^\Delta_\alpha$ ".

1. Если $\rho^x_L A_\lrcorner$ имеет при всех x один из видов $(t=u)$, $(t \in Q)$, $\exists x B$ $(\forall x B)$, ~~1. $(t=u) \in \Sigma^\Delta_0$; $(t=u) \in \Pi^\Delta_0$.~~ то $A \in \Sigma^0_0$ $(A \in \Pi^0_0)$

2. Если при всех n $A(X|n) \in \Pi^\Delta_\alpha$, то и $\forall X A \in \Pi^\Delta_\alpha$.

3. Если при всех n $A(X|n) \in \Sigma^\Delta_\alpha$, то и $\exists X A \in \Sigma^\Delta_\alpha$.

4. Если $\rho_L (t \in Q)_\lrcorner \in \Pi^\Delta_\alpha$ / $\rho_L (t \in Q)_\lrcorner \in \Sigma^\Delta_\alpha$ /, то и $(t \in Q) \in \Pi^\Delta_\alpha$ / $(t \in Q) \in \Sigma^\Delta_\alpha$ /.

5. Если $A \in \Pi^\Delta_\alpha$, и $\alpha \prec \beta$, то $A \in \Pi^\Delta_\beta$ $A \in \Sigma^\Delta_\beta$.

Если $A \in \Sigma^\Delta_\alpha$, и $\alpha \prec \beta$, то $A \in \Pi^\Delta_\beta$ и $A \in \Sigma^\Delta_\beta$.

<u>Определение 3.2.</u> Предикатор $M \in \Pi^\Delta_\alpha$ / $M \in \Sigma^\Delta_\alpha$ /, если при каждом n формула $(n \in M)$ предварённая и $(n \in M) \in \Pi^\Delta_\alpha$ / $(n \in M) \in \Sigma^\Delta_\alpha$ /.

<u>ТЕОРЕМА 3.2</u>. Для каждого предикатора $M \in \Pi^\Delta_\alpha$ / $M \in \Sigma^\Delta_\alpha$ / можно построить предикатор N, такой,

что $\models \forall x (x \in N \supset x \in N)$,

$$n \in M \Rightarrow n \in N,$$

$$N \in \Pi^{\Delta}_{\alpha} (N \in \Sigma^{\Delta}_{\alpha}) .$$

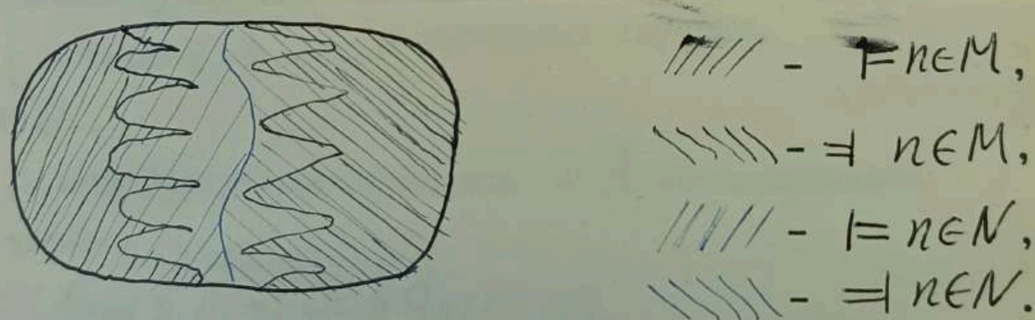
<u>Доказательство</u>.

Достаточно дать способ по каждой предварённой формуле из класса Π^{Δ}_{α} / Σ^{Δ}_{α} /, примитивно-рекурсивно строить такую формулу E ,имеющую α перемен кванторов,что

$$\models E \supset E \quad ,$$

$$A \Rightarrow E \quad ,$$

Теорему 3.2. мы будем называть <u>теоремой</u> <u>разделимости</u> , так как она утверждает существование достаточно простого предикатора,разделяющего множества истинности и ложности M ,см. рисунок



Построение формулы E .

По A можно построить примитивно-рекурсивную функцию $g(x,y)$, такую,что

$$\dot{\forall} x \dot{\exists} y\, g(x,y) \dot{\neq} 0 \quad ,$$

$$g(m,n) \dot{\neq} 0 \Rightarrow \ulcorner \rho^{m} \llcorner A \lrcorner \urcorner \doteq g(m,n) \dot{-} 1 \quad .$$

По $g(x,y)$ можно построить ПРФ $\tilde{g}(x, x_1, y)$,такую,что $x \preccurlyeq x_1$ - обычное отношение порядка среди кортежей/

$$x \not\preccurlyeq x_1 \Rightarrow \tilde{g}(x, x_1, y) \doteq 1$$

$$\dot{\forall} x x_1 \dot{\exists} y\, \tilde{g}(x, x_1, y) \dot{\neq} 0 \quad ,$$

$$x \preccurlyeq x_1 \,\&\, \tilde{g}(x, x_1, y) \dot{\neq} 0 \Rightarrow \tilde{g}(x, x_1, y) \doteq [\rho^{x} \llcorner A \lrcorner, \dots, \rho^{x_1} \llcorner A \lrcorner] + 1 \quad ,$$

$[\rho^{1}_{\llcorner}A_{\lrcorner}, \ldots, \rho^{n}_{\llcorner}A_{\lrcorner}]$ – кортеж всех значений $\rho^{n}_{\llcorner}A_{\lrcorner}$ для $1 \leqslant n \leqslant x_1$, расположенных в порядке возрастания $\mathrm{eh}(n)$.

Пусть φ – трёхместная ПРФ. Построим ПРФ S_φ, ℓ_φ:

$S_\varphi(n,k,m)$:

1. n – не кортеж номеров замкнутых формул Δ.

$S_\varphi(n,k,m) \rightleftharpoons 0$.

2. $k>1$. $S_\varphi(n,k,m) \rightleftharpoons 0$.

3. $k \doteq 1$.

а/ В n есть формула, начинающаяся с $\forall$ и не являющаяся последним членом n.

$$S_\varphi(n,1,m) \rightleftharpoons \llcorner \exists x (0=1) \lrcorner .$$

б/ Все формулы, входящие в n и не стоящие на последнем месте, не начинаются с $\forall$.

$$S_\varphi(n,1,m) \rightleftharpoons \begin{cases} \llcorner \exists x (0 \in \varphi(3,m,0)) \lrcorner, & (n)_{\mathrm{eh}(n)} \text{ начинается с } \forall. \\ \llcorner \exists x \ulcorner (n)_{\mathrm{eh}(n)} \urcorner \lrcorner, & (n)_{\mathrm{eh}(n)} \text{ элементарна.} \\ \llcorner \exists x (0=1) \lrcorner, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

4. $k \doteq 0$,

а/ В n есть формула, начинающаяся с $\exists$, не являющаяся последним членом n.

$$S_\varphi(n,0,m) \rightleftharpoons \llcorner \exists x (0=0) \lrcorner .$$

б/ Все формулы, не являющиеся последними членами n и входящие в n, не начинаются с $\exists$.

$$S_\varphi(n,0,m) \rightleftharpoons \begin{cases} \llcorner \exists x (0 \in \varphi(2,m,0)) \lrcorner, & \ulcorner (n)_{\mathrm{eh}(n)} \urcorner \text{ начинается с } \exists \\ \llcorner \exists x \ulcorner (n)_{\mathrm{eh}(n)} \urcorner \lrcorner, & \ulcorner (n)_{\mathrm{eh}(n)} \urcorner \text{ элементарна.} \\ \llcorner \exists x (0=0) \lrcorner, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

$\ell_\varphi(m, m_1, k, n)$:

1. $m \not\leqslant m_1$:

$$\ell_\varphi(m,m_1,k,n) \rightleftharpoons \begin{cases} \llcorner \exists x (0=0) \lrcorner, & k \doteq 0 \\ \llcorner \exists x (0=1) \lrcorner, & k \doteq 1 \end{cases}$$

2. $m \leqslant m_1$:

$$\lceil 9x(0\in\varphi(1,[m,m_1,k],n+1))\rceil,$$

$$,m_1,k,n) \rightleftharpoons \begin{cases} \ldots, & \text{если } \tilde{g}(m,m_1,n)\doteq 0, \\ S_\varphi(\tilde{g}(m,m_1,n)\dot{-}1,k,m_1) & \\ & \text{если } \tilde{g}(m,m_1,n)\not\doteq 0, \end{cases}$$

Теперь по теореме Клини о неподвижной точке подберём φ^* ким образом, что

$$\varphi^*(1,[m,m_1,k],n)\doteq \ell_{\varphi^*}(m,m_1,k,n),$$

$$\varphi^*(2,m,0)\doteq \lceil 9x\exists y(0\in \ell_{\varphi^*}(m,y,1,0))\rceil,$$

$$\varphi^*(3,m,0)\doteq \lceil 9x\forall y(0\in \ell_{\varphi^*}(m,y,0,0))\rceil,$$

обозначим

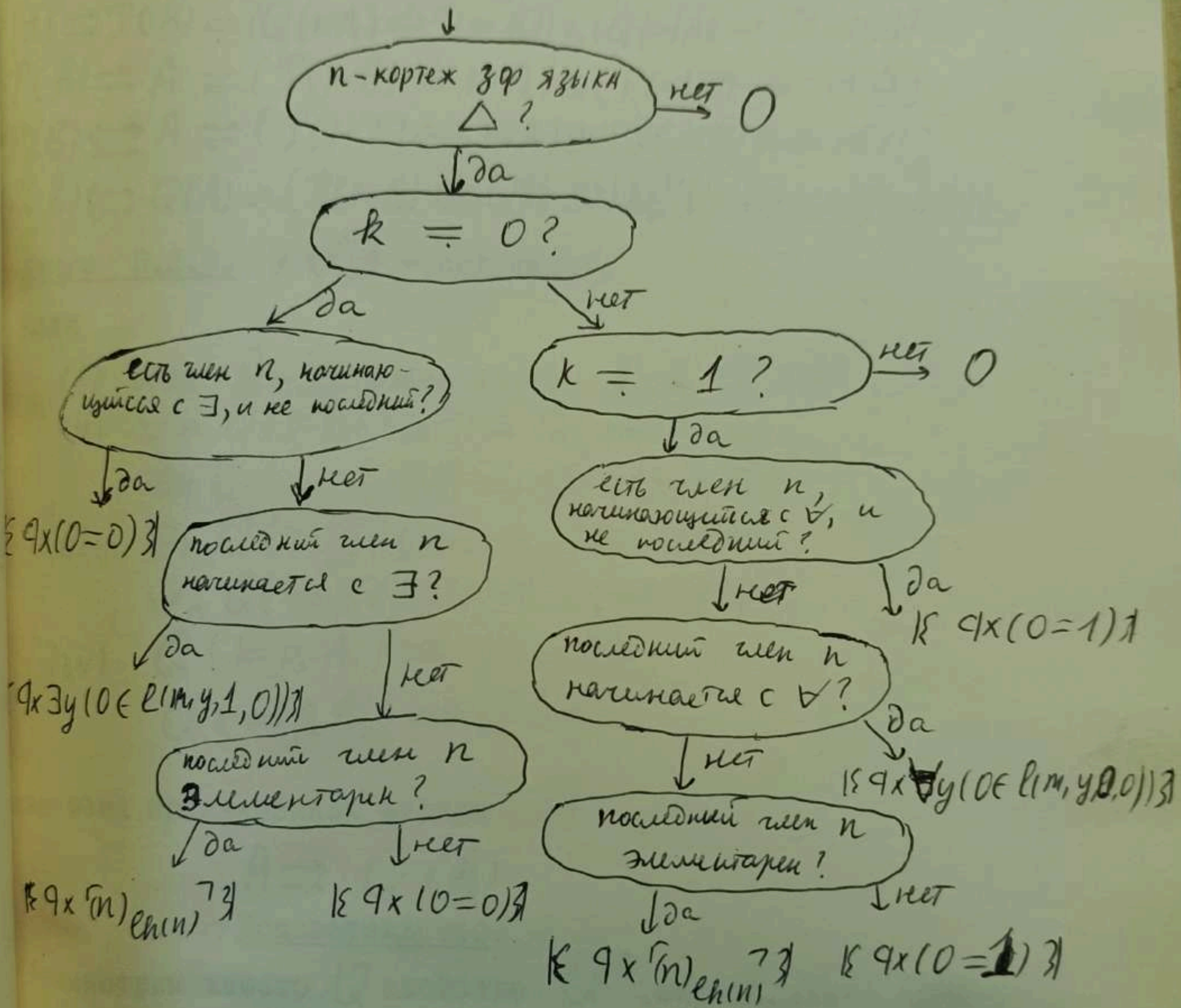
$$S \rightleftharpoons S_{\varphi^*}, \quad \ell \rightleftharpoons \ell_{\varphi^*}.$$

На следующем листе нарисована схема действия S.

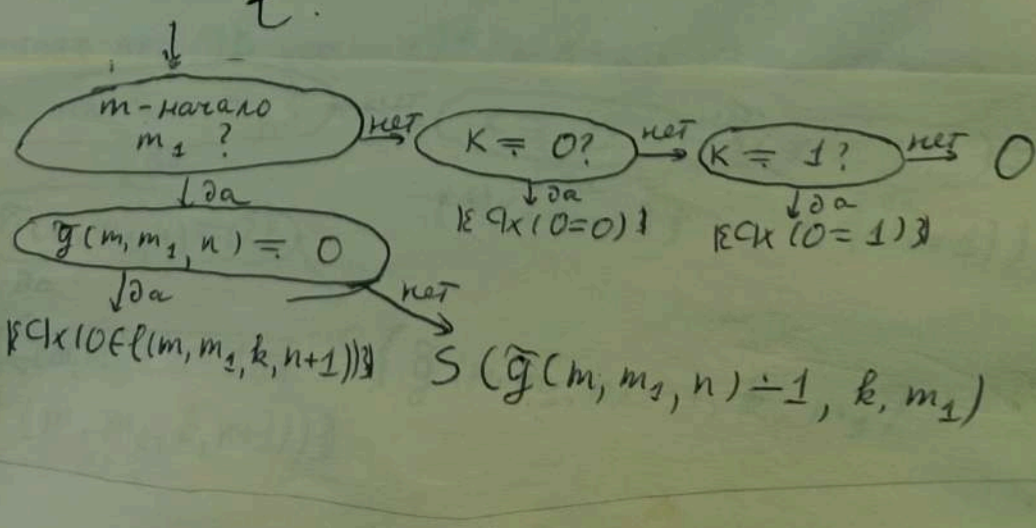
$$E \rightleftharpoons \begin{cases} \exists y(0\in \ell(m,y,1,0)) & \text{,для случая } \Sigma^{\Delta}_{\alpha} \\ \forall y(0\in \ell(m,y,0,0)) & \text{,для случая } \Pi^{\Delta}_{\alpha} \end{cases}$$

Схема действия S и l;

S:



l:



Пусть A, B - формулы, $\mathcal{P}, Q$ - свойства слов. Введём сокращения:

$$A \rightleftarrows \mathcal{P}(B) \rightleftharpoons (\vDash A \Rightarrow \mathcal{P}(\vDash B)) \& (\dashv A \Rightarrow \mathcal{P}(\dashv B)) \quad ,$$

$$Q(A) \rightleftarrows \mathcal{P}(B) \rightleftharpoons (Q(\vDash A) \Rightarrow \mathcal{P}(\vDash B)) \& (Q(\dashv A) \Rightarrow \mathcal{P}(\dashv B)) \quad ,$$

$$\mathcal{P}(B) \rightleftarrows A \rightleftharpoons (\mathcal{P}(\vDash B) \Rightarrow \vDash A) \& (\mathcal{P}(\dashv B) \Rightarrow \dashv A) \quad ,$$

$$\mathcal{P}(B) \leftrightarrows A \rightleftharpoons (\mathcal{P}(\vDash B) \Leftrightarrow \vDash A) \& (\mathcal{P}(\dashv B) \Leftrightarrow \dashv A) \quad ,$$

$$\mathcal{P}(B) \leftrightarrows Q(A) \rightleftharpoons (\mathcal{P}(\vDash B) \Leftrightarrow Q(\vDash A)) \& (\mathcal{P}(\dashv B) \Leftrightarrow Q(\dashv A)) .$$

<u>Лемма 3.2.2.</u> /$\forall\exists$ - индукция/.

Если

(i) если A - элементарна, то $A \rightleftarrows Q(A)$,

(ii) $\dot{\forall} n\, Q(\vDash A(X|n)) \Rightarrow Q(\vDash \forall X A)$,

$\dot{\exists} n\, Q(\dashv A(X|n)) \Rightarrow Q(\dashv \forall X A)$,

(iii) $\dot{\exists} n\, Q(\vDash A(X|n)) \Rightarrow Q(\vDash \exists X A)$,

$\dot{\forall} n\, Q(\dashv A(X|n)) \Rightarrow Q(\dashv \exists X A)$,

(iv) $Q(\vDash \rho_2 A_\rfloor) \Rightarrow Q(\vDash A)$,

$Q(\dashv \rho_2 A_\rfloor) \Rightarrow Q(\dashv A)$,

для всех предварённых формул A

$$A \rightleftarrows Q(A) \quad .$$

<u>Доказательство</u>.

Рассмотрим вместо Q свойство Q^*, определяемое следующим образом:

1. Если A имеет вид $\neg B$, то $Q^*(\vDash A) \Leftrightarrow Q(\dashv B)$,
$Q^*(\dashv A) \Leftrightarrow Q(\vDash B)$, / B не вида $\forall X \neg C$ /.

2. Если A имеет вид $\forall X \neg B$, то
$Q^*(\vDash A) \Leftrightarrow \dot{\forall} n\, Q(\dashv B(X|n))$
$Q^*(\dashv A) \Leftrightarrow \dot{\exists} n\, Q(\vDash B(X|n))$,
B не вида $\forall Y \neg C$ /.

3. Во всех остальных случаях $Q^*(A) \leftrightarrows Q(A)$.

Воспользуемся определением классической истинности. Непосредственно видно, что в условиях леммы Q^* удовлетворяет всем условиям индукции по этому определению для всех предварённых A и A вида $\neg B$, $\forall X \neg B$, где B - предварённая. Отсюда

$$A \rightleftarrows Q^*(A) \quad ,$$

A - формула одного из этих видов, и, в частности, для всех предварённых A

$$A \rightleftarrows Q(A) \; .$$

Определим ОРФ $S'(A,k,x)$:

а/ $S'(A,0,x) \rightleftarrows p^x \llcorner A \lrcorner$, если нет $y \prec x$, такого, что $p^y \llcorner A \lrcorner$ начинается с $\exists$, и $p^x \llcorner A \lrcorner$ начинается с $\exists$ или есть элементарная формула.

б/ $S'(A,0,x) \rightleftarrows (0=0)$, иначе.

в/ $S'(A,1,x) \rightleftarrows p^x \llcorner A \lrcorner$, если нет $y \prec x$, такого, что $p^y \llcorner A \lrcorner$ начинается с $\forall$, и $p^x \llcorner A \lrcorner$ начинается с $\forall$ или есть элементарная формула.

г/ $S'(A,1,x) \rightleftarrows (0 \neq 1)$, иначе.

Лемма 3.2.2. / S - редукция/.

Если A - предварённая формула, то

а1/ $\models A \Rightarrow \dot{\forall} x \models S'(A,0,x)$,

б1/ $\models A \Rightarrow \dot{\exists} x \models S'(A,1,x)$,

а2/ $\dashv A \Rightarrow \dot{\exists} x \dashv S'(A,0,x)$,

б2/ $\dashv A \Rightarrow \dot{\forall} x \not\models S'(A,1,x)$.

Доказательство.

$\forall\exists$ - индукция.

I. Пусть A - элементарна, Тогда при каждом x

$$S'(A,0,x) \rightleftarrows S'(A,1,x) \rightleftarrows A$$

условия леммы очевидны.

2. Пусть $A \doteq \forall x B$ и для всех $B(x|n)$ выполнены условия леммы. Пусть $\models A$. Тогда для всех $n \models B(x|n)$, и, следовательно,

$$\forall n \, \forall x \models S'(A(x|n), 0, x) \quad .$$

Но, по построению, S', если A имеет вид $\forall x B$, то

$$S'(A,0,0) \doteq (0=0),$$

$$S'(A, 0, [n]*x) \doteq S'(A(x|n), 0, x) \, ,$$

и, следовательно,

$$\forall x \models S'(A, 0, x) \quad .$$

Теперь рассмотрим свойство б1. $S'(A,1,0) \doteq A$, и, следовательно, б1 тривиально.

Пусть теперь A ложно. Тогда, так как $S'(A,1,0) \doteq A$, $S'(A,1,[n]*x) \doteq (0=1)$ при любых n и x, то

$$\forall x \dashv S'(A, 1, x) \quad .$$

Свойство б2 для данного случая доказано.

Так как

$$\dashv \forall x B \Leftrightarrow \dot{\exists} n \dashv B(x|n) \, ,$$

то, по предположению индукции,

$$\dot{\exists} n \, \dot{\exists} x \dashv S'(A, 0, [n]*x) \quad ,$$

и, следовательно, $\dot{\exists} x \dashv S'(A, 0, x)$.

3. Пусть $A \doteq \exists x B$. Доказательство двойственно.

4. Пусть $A \doteq (t \in Q)$. Тогда

$$S'(A,0,0) \doteq (0=0) \quad ,$$

$$S'(A,1,0) \doteq (0=1) \quad ,$$

$$S'(A,k,[n]*x) \doteq S'(\rho_\iota A, k, x) \quad ,$$

и все условия проверяются легко, т.к.

$$A \rightleftarrows \rho_\iota A \quad .$$

<u>Лемма 3.2.3</u>. / S - индукция /.

Если

а/ для всех элементарных формул A $A \rightleftarrows Q(A)$,

б/ $\dot{\forall} x\, Q(\vDash S'(A,0,x)) \Rightarrow Q(\vDash A)$,

$\dot{\exists} x\, Q(\dashv S'(A,0,x)) \Rightarrow Q(\dashv A)$,

в/ $\dot{\exists} x\, Q(\vDash S'(A,1,x)) \Rightarrow Q(\vDash A)$,

$\dot{\forall} x\, Q(\dashv S'(A,1,x)) \Rightarrow Q(\dashv A)$,

то для всех предварённых формул

$$A \rightleftarrows Q(A) \quad .$$

<u>Доказательство.</u>

Рассмотрим вместо Q свойство Q^*:

$Q^*(\vDash A) \rightleftharpoons Q(\vDash A) \mathbin{\dot{\&}} \dot{\forall} x\, Q(\vDash S'(A,0,x)) \mathbin{\dot{\&}}$
$\dot{\exists} x\, Q(\vDash S'(A,1,x)) \mathbin{\dot{\&}} \vDash A$,

$Q^*(\dashv A) \rightleftharpoons Q(\dashv A) \mathbin{\dot{\&}} \dot{\exists} x\, Q(\dashv S'(A,0,x)) \mathbin{\dot{\&}}$
$\dot{\forall} x\, Q(\dashv S'(A,1,x)) \mathbin{\dot{\&}} \dashv A$.

Проверим все условия $\dot{\forall}\dot{\exists}$ - индукции для свойства Q^*.

Для элементарных A $A \rightleftarrows Q^*(A)$. Очевидно.

(ii) $\dot{\forall} n\, Q^*(\vDash A(X|n)) \Rightarrow Q^*(\vDash \forall X A)$,

$\dot{\exists} n\, Q^*(\dashv A(X|n)) \Rightarrow Q^*(\dashv \forall X A)$.

Пусть выполнены все условия леммы и

$$\dot{\forall} n\, Q^*(\vDash A(X|n)) \quad .$$

Тогда для всех n , в частности,

$Q(\vDash A(X|n))$,

$\dot{\forall} x\, Q(\vDash S'(A(X|n),0,x))$,

$\vDash A(X|n)$.

Значит,

$\dot{\forall} n\, \dot{\forall} x\, Q(\vDash S'(\forall X A, 0, [n] * x))$,

$\vDash \forall X A$.

Следовательно, т.к. $Q(\vdash(0=0))$ и $S'(\forall XA, 0, 0) \doteq (0=0)$,

$$\dot{\forall} x Q(\models S'(\forall XA, 0, x))$$,

и по в/ $Q(\models \forall XA)$.

Тогда, в частности, $\dot{\exists} x Q(\models S'(\forall XA, 1, x))$, т.к. $S'(\forall XA, 1, 0) \doteq A$, и, следовательно, $Q^*(\models \forall XA)$.

Пусть $\dot{\exists} n\, Q^*(\dashv A(X|n))$.

Тогда при некотором n

$$\dashv A(X|n)$$,

$$Q(\dashv A(X|n))$$,

$$\dot{\exists} x Q(\dashv S'(A(X|n), 0, x))$$.

Следовательно,

$$\dashv \forall XA$$,

$$\dot{\exists} x Q(\dashv S'(\forall XA, 0, x))$$,

$$Q(\dashv \forall XA)$$ / по в/ /,

$$\dot{\forall} x\ Q(\dashv S'(\forall XA, 1, x))$$

т.к. $S'(\forall XA, 1, 0) \doteq \forall XA$, $S'(\forall XA, 1, [n]*x) \doteq (0=1)$/

$$Q^*(\dashv \forall XA)$$

iii), iV) доказывается аналогично.

Следовательно, для всех предварённых формул

$$A \rightleftarrows Q^*(A)$$,

в частности,

$$A \rightleftarrows Q(A).$$

S - индукция доказана.

Собственно доказательство теоремы.

I. Для всех предварённых формул A

$$p^m{}_{\llcorner} A_{\lrcorner} \rightleftarrows \forall y(0 \in \ell(m, y, 0, 0)),$$

$$p^m{}_{\llcorner} A_{\lrcorner} \rightleftarrows \exists y(0 \in \ell(m, y, 1, 0)).$$

Индукцией по наименьшему такому k, что $\tilde{g}(m, m_1, k) \neq 0$ доказываем, что

$$0 \in \ell(m, m_1, 0, 0) \leftrightarrows 0 \in S([\rho^m \llcorner A \lrcorner, \ldots, \rho^{m_1} \llcorner A \lrcorner], 0, m_1)$$
,

$$0 \in \ell(m, m_1, 1, 0) \leftrightarrows 0 \in S([\rho^m \llcorner A \lrcorner, \ldots, \rho^{m_1} \llcorner A \lrcorner], 1, m_1).$$

Доказательство этого факта легко, оно сводится к цепочке полных эквивалентностей вида $A \leftrightarrows \rho \llcorner A \lrcorner$.

Теперь S - индукцией докажем

$$S'(\rho^m \llcorner A \lrcorner, k, x) \Rightarrow 0 \in S([\rho^m \llcorner A \lrcorner, \ldots, \rho^{m*x} \llcorner A \lrcorner, k, m*x).$$

Рассмотрим свойство Q :

$$Q(\vDash B) \rightleftarrows \forall x, k, m\, (B \doteqdot S'(\rho^m \llcorner A \lrcorner, k, x) \Rightarrow \\ \vDash 0 \in \ell(m, m*x, k, 0))$$
,

$$Q(\dashv B) \rightleftarrows \forall x, k, m\, (B \doteqdot S'(\rho^m \llcorner A \lrcorner, k, x) \Rightarrow \\ \dashv 0 \in \ell(m, m*x, k, 0))$$
.

<u>Базис</u>. а/ Пусть B - элементарно и $B \doteqdot S'(\rho^m \llcorner A, 0, x)$. Тогда либо в кортеже $[\rho^m \llcorner A \lrcorner, \ldots, \rho^{m*x} \llcorner A \lrcorner]$ есть член, не являющийся последним и начинающийся с $\exists$, и $B \doteqdot (0=0)$, или же $\rho^{m*x} \llcorner A \lrcorner \doteqdot B$. Но в обоих этих случаях

$$\rho \llcorner \rho \llcorner 0 \in S([\rho^m \llcorner A \lrcorner, \ldots, \rho^{m*x} \llcorner A \lrcorner], 0, m*x) \lrcorner \lrcorner \doteqdot B$$
.

б/ $B \doteqdot S'(\rho^m \llcorner A \lrcorner, 1, x)$, Совершенно аналогично.

Шаг индукции - I.

$$\forall x\, Q(\vDash S'(B, 0, x)) \Rightarrow Q(\vDash B)$$
,

$$\exists x\, Q(\dashv S'(B, 0, x)) \Rightarrow Q(\dashv B)$$
.

Пусть B неэлементарна и имеет место

$\forall x\, Q(\vDash S'(B, 0, x))$, $B \doteqdot S'(\rho^m \llcorner A, 0, x_1)$.

Тогда B, по определению S', начинается с $\exists$, и

$$S'(B, 0, x) \doteqdot \begin{cases} B \doteqdot \rho^{m*x_1} \llcorner A \lrcorner & \text{при } x_1 \doteqdot 0, \\ 10 = 0) & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, $Q(\vDash B)$.

Пусть теперь

$\forall x\, Q(\vDash S'(B, 0, x))$, $B \doteqdot S'(\rho^m \llcorner A \lrcorner, 1, x_1)$.

Тогда, т.к. B - неэлементарна, то B начинается с $\forall$.

Но по определению

$$0 \in \ell(m, m*x_1, 1, 0) \Longleftrightarrow$$
$$0 \in S([p^m{}_{\llcorner}A_{\lrcorner}, \ldots, p^{m*x_1}{}_{\llcorner}A_{\lrcorner}], 1, m*x_1) \Longleftrightarrow$$
$$\forall y\,(0 \in \ell(m*x_1, y, 0, 0))$$

Пусть для всех y $Q(\models S'(B, 0, y))$.

Тогда по предположению индукции

$$\models 0 \in \ell(m*x_1, y, 0, 0) \quad .$$

Следовательно,

$$\models 0 \in S([p^m{}_{\llcorner}A_{\lrcorner}, \ldots, p^{m*x_1}{}_{\llcorner}A_{\lrcorner}], 1, 0) \quad ,$$
$$\models 0 \in \ell(m, m*x_1, 1, 0) \quad .$$

Случай, соответствующий п. в/ S - индукции и случаю элементарного B разбирается аналогично.

Теперь мы доказали утверждение I . Из него вытекает, что во всех случаях

$$A \rightleftarrows E \quad .$$

Принадлежность формулы E к тому же классу, что и формулы A , непосредственно видна из её построения.

Осталось показать всегда осмысленность E . Это тривиально доказывается индукцией по α .

Теорема 3.2. доказана.

Теорема 3.2 даёт необходимый признак приводимости предикатора к предварённой форме с α переменами кванторов: области его истинности и ложности должны отделяться всюду осмысленным утверждением. В дальнейшем мы покажем, что это условие является также и достаточным для представимости с α переменами кванторов.

§ 3.3. Обобщение иерархии Клини-Мостовского.

В прошлом параграфе было показано, что области истинности и ложности достаточно простой формулы можно разделить достаточно простой всюду осмысленной формулой. Здесь будет показано, что верно и обратное.

Сначала мы установим это для простейших формул - формул с одной переменой кванторов.

<u>Лемма 3.3.I</u>. Для каждой формулы B класса Π_1^{Δ} можно примитивно-рекурсивно построить формулу D вида

$$\forall x \exists y (t(x,y)=0) ,$$

такую, что $B \rightrightarrows D$.

Эта лемма усиливает теорему об отделимости, утверждая, что D можно подобрать арифметическим.

<u>Доказательство.</u>

По формуле B можно построить ПРФ $\tilde{g}(x,y)$,такую, что

$$\dot\forall n \dot\exists m \; \tilde{g}(n,m) \dot\neq 0$$

и

$$g(x,m) \dot\neq 0 \Rightarrow \tilde{g}(x,m) \dot- 1 \dot= [\rho^0 \llcorner B \lrcorner, \ldots, \rho^x \llcorner B \lrcorner].$$

Можно построить также ПРФ Z ,такую, что

$$\dot\forall n \dot\exists m \; Z(n,m) \dot\neq 0 ,$$

$$m(Z(\{t=u\},m) \dot= 1) \Leftrightarrow z\llcorner t \lrcorner \dot= z \llcorner u \lrcorner .$$

Построим ПРФ t :

$(x,y) \dot= 0$, если $\dot\exists z \leq x+y , \tilde{g}(x,z) \dot\neq 0$ и выполнено хотя бы одно из следующих [redacted] условий:

а/ В $\tilde{g}(x,z) \dot- 1$ есть член, начинающийся с $\exists$ и не являющийся последним.

б/ В $\tilde{g}(x,z) \dot- 1$ последний член элементарен и, если его обозначить через n ,то выполнено условие

$$\exists u \leq x+y \;\; Z(n,u) \dot= 1 .$$

в/ В $\tilde{g}(x,z) \dot- 1$ последний член начинается с $\exists$, и $\dot\exists u \leq y \;\; \dot\exists v \leq x+y \;\; \tilde{g}(x*u,v) \dot\neq 0$, и в $\tilde{g}(x*u,v) \dot- 1$

последний член n элементарен, и

$$\dot{\exists} w \leq x+y \; Z(n,w) \dot{=} 1$$

.

г/ Последний член $\tilde{g}(x,z) \dot{-} 1$ не начинается с $\exists$ и не элементарен.

$t(x,y) \rightleftharpoons 1$, во всех остальных случаях.

Если $\rho^x \llcorner B \lrcorner \neq S'(B,0,x)$,то,как только $\tilde{g}$ закончит вычисление $[\rho^0 \llcorner B \lrcorner, \ldots, \rho^x \llcorner B \lrcorner]$, мы сразу же отбрасываем этот кортеж как "неинтересный" и выдадим в качестве результата 0.

Для того,чтобы это свойство сохранилось и для формул,не принадлежащих к классу Π_1^Δ , мы несколько видоизменим формулировку пункта в/ , потребуем дополнительно проверить,что в $[\rho^x \llcorner B \lrcorner, \ldots, \rho^{x*u} \llcorner B \lrcorner]$ не встречается формул,начинающихся с $\forall$. Если же такие встретятся,то мы положим $t(x,y) \dot{=} 1$.

Достаточно рассмотреть такие x ,что

$$\rho^x \llcorner B \lrcorner \dot{=} S'(B,0,x).$$

По S - редукции,если формула B истинна,то все такие $\rho^x \llcorner B \lrcorner$ истинны,если же формула B ложна,то существует x , такое,что $\rho^x \llcorner B \lrcorner \dot{=} S'(B,0,x)$ и $\rho^x \llcorner B \lrcorner$ ложно.

Все такие $\rho^x \llcorner B \lrcorner$ есть либо элементарные формулы,либо Σ_0^Δ - формулы. Если $\dot{\rho}^x \llcorner B \lrcorner$ элементарна,то

$$\models \rho^x \llcorner B \lrcorner \Longleftrightarrow \exists v \; Z(\rho^x \llcorner B \lrcorner, v) \dot{=} 1 ,$$

следовательно,

$$\models \rho^x \llcorner B \lrcorner \Longleftrightarrow \dot{\exists} y \; t(x,y) \dot{=} 0 .$$

Если $\rho^x \llcorner B \lrcorner$ Σ_0^Δ - формула,то по S -редукции она истинна тогда и только тогда,когда найдётся истинная формула вида $S'(\rho^x \llcorner B \lrcorner, 1, z)$,но такая формула может быть лишь элементарной,и опять применим то же рассуждение.

Итак,

$$B \rightleftharpoons \dot{\forall} x \, \dot{\exists} y \, (t(x,y) = 0) .$$

<u>Лемма 3.3.2.</u> Для каждой формулы B класса Σ_1^{Δ} можно примитивно-рекурсивно построить формулу D вида

$$\exists x \forall y (t(x,y)=0) ,$$

такую, что

$$B \rightleftarrows D .$$

Доказательство и построение двойственно лемме 3.3.I.

Пусть $i \rightleftharpoons (\{9x(x\in x)\} \in \{9x(x\in x)\})$

<u>Определение</u> 3.3.I. Пусть i - стандартная бессмыслица.

$$A \circledast C \rightleftharpoons ((A\equiv C) \vee i) \equiv A .$$

$A \circledast C$ обладает следующей таблицей истинности:

	И	Л	Б
И	И	Б	Б
Л	Б	Л	Б
Б	Б	Б	Б

Есть такое i в Δ? нет i?

<u>Лемма 3.3.3.</u> По формулам A и B, таким, что $B \in \Pi_1^{\Delta}$ / $B \in \Sigma_1^{\Delta}$ / и $\models B \supset B$ можно построить формулу C, такую, что $C \in \Pi_1^{\Delta}$ / $C \in \Sigma_1^{\Delta}$ / и

$$C \rightleftarrows A \circledast B .$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим два случая.

I. $B \in \Pi_1^{\Delta}$. По лемме 3.3.I. найдём ПРФ $t(x,y)$, такую, что

$$B \rightleftarrows \forall x \exists y (t(x,y)=0) .$$

Пусть $f(x)$ - запирание, сопряжённое с A, $g(x)$ - запирание, сопряжённое с $\neg A$.

Пусть φ - двухместная ПРФ. Пусть $(y)_{-1}$ - кортеж y без первого элемента.

$$h_{\varphi}(x,y) \rightleftharpoons \begin{cases} \{9x(0=0)\} & , t(x,(y)_1 + lh(y) \dot{-} 1) \doteq 0 \\ \{9x(0=1)\} & , g((y)_{-1}) \doteq 0,\ t(x,(y)_1 + lh(y) \dot{-} 1) \not\doteq 0 \\ \{9u\, \exists z (0 \in \varphi(x, y * [z]))\} & , \text{иначе.} \end{cases}$$

Подберём φ^* так, что $h_{\varphi^*} \doteq \varphi^*$.

$$h_{\varphi^*} \rightleftharpoons h .$$

Теперь пусть φ - одноместная ПРФ.

$$l_\varphi(x) \rightleftharpoons \begin{cases} \{\!\{ q x(0=0) \}\!\}, & f(x) \doteq 0 \\ \{\!\{ q y \forall z (0 \in \varphi(x * [z])) \}\!\} & \text{, иначе.} \end{cases}$$

Опять подберём φ^* так, что $l_{\varphi^*} \doteq \varphi^*$, и обозначим

$$l_{\varphi^*} \rightleftharpoons l .$$

$$r(x) \rightleftharpoons \begin{cases} \{\!\{ q y (0 \in h(x \dot- 1, 0)) \}\!\}, & x > 0 \\ \{\!\{ q y (0 \in l(0)) \}\!\}, & x \doteq 0 \end{cases}$$

$$C \rightleftharpoons \forall x (0 \in r(x)) .$$

По определению истинности,

$$\models C \Leftrightarrow \forall n \models (0 \in r(n)) .$$

Но $(0 \in r(0)) \leftrightarrows (0 \in l(0))$, а

$$\models (0 \in l(0)) \Leftrightarrow f\,3\,0 \Leftrightarrow \models A .$$

Следовательно, достаточно доказать

$$\models A \Rightarrow (\models B \Leftrightarrow \forall n > 0 \models (0 \in r(n))) .$$

Если $\models A \& B$, то $\sim g\,3\,0$, и, в частности, для всех m найдётся y, такое, что $lh(y) \doteq m$ и для всех $z \dot\leq y$ $g((z)_{-1}) \neq 0$. Но

$$\models B \Leftrightarrow \models \forall x \exists y (t(x,y) = 0) ,$$

и, следовательно, для всех n существует такое m, что $\models (t(n,m) = 0)$. Но тогда для всех n найдётся такое y, что

$$\forall z \dot\leq y \quad g((z)_{-1}) \neq 0$$

и $t(n, (y)_1 + lh((y)_{-1}) \dot- 1) \doteq 0$, значит, и $h(n,y) \doteq \{\!\{ q x (0=0) \}\!\}$,

$\forall u \dot\leq y$ $h(n,u) \doteq \{\!\{ q u \exists z (0 \in h(x, y * [z])) \}\!\}$.

Следовательно, существует такое w, что

$$S'(0 \in h(n,0), 1, w) \doteq (0=0)$$

и по S - редукции, истинно $(0 \in h(n,0))$. Обратно, если $\forall n > 0 \models (0 \in r(n))$, то, по S - редукции,

$$\models \forall x \exists y\, t(x,y)=0$$

и $\models B$. ,

Пусть теперь $\dashv A \circledand B$.Тогда найдётся такое n ,что для всех m $t(n,m) \dot{\neq} 0$, и $g \ni 0$.Следовательно, $\dashv (0 \in h(n,0))$. Если же $\dashv C$,то при каком-то n $\dashv (0 \in h(n,0))$, и,следовательно, $g \ni 0$ и при всех m $t(n,m) \dot{\neq} 0$.

Доказательство завершено.

Заметим,что,при $B \notin \Pi^\Delta_1$,но $\models B \supset B$, если $\models \forall x \exists y t(x,y)=0$, то $\models B$. Отсюда же следует,что даже при $B \notin \Pi^\Delta_1$,

$$\models C \Rightarrow \models A \circledand B$$

Для класса Σ^Δ_1 можно при помощи леммы 3.3.2. провести двойственную конструкцию и доказать вторую часть утверждения леммы.При этом для $B \notin \Sigma^\Delta_1$ и осмысленных

$$\dashv C \Rightarrow \dashv A \circledand B \, .$$

Оба утверждения леммы вместе с доказательством можно резюмировать в следующем следствии:

<u>Следствие:</u> Существует примитивно-рекурсивная функция $\xi(A,B,k)$, строящая по формулам A и B и $k \dot{=} 0,1$ такую формулу C ,что при $C \in \Sigma^\Delta_1 \cup \Pi^\Delta_1$ и

$$B \in \Pi^\Delta_1 \,\&\, \models B \supset B \Rightarrow \xi(A,B,1) \in \Pi^\Delta_1 \,\&\, \xi(A,B,1) \leftrightarrows A \circledand B,$$

$$B \in \Sigma^\Delta_1 \,\&\, \models B \supset B \Rightarrow \xi(A,B,0) \in \Sigma^\Delta_1 \,\&\, \xi(A,B,0) \leftrightarrows A \circledand B,$$

$$\models \xi(A,B,1) \Rightarrow \models A \circledand B, \quad \dashv \xi(A,B,0) \Rightarrow \dashv A \circledand B \quad ,$$

$$\xi(A,B,1) \in \Pi^\Delta_1 \quad , \quad \xi(A,B,0) \in \Sigma^\Delta_1 \quad .$$

Теперь перейдём к формулировке и доказательству основной теоремы.

<u>Теорема 3.3.</u> /Обобщённая теорема спаривания/.

Если имеется формула $B \in \Pi^\Delta_\alpha$, $B \in \Sigma^\Delta_\alpha$ 1, $\alpha \geq 1$

$\cancel{\models B \supset B}$

и такая, что

$$A \rightrightarrows B$$

то имеется формула $C \in \Pi^{\Delta}_{\alpha}$ / $C \in \Sigma^{\Delta}_{\alpha}$ /, и

$$C \leftrightarrows A ,$$

В случае, если α - клиниевский ординал, C примитивно-рекурсивно строится по A, B и α.

<u>Доказательство</u>.

Будем доказывать более общее утверждение.

<u>Лемма 3.3.4</u>. Если $B \in \Sigma^{\Delta}_{\alpha}$ / $B \in \Pi^{\Delta}_{\alpha}$ /, $\alpha \geq 1$, $\models (B \supset B)$

то по формулам A и B, и клиниевскому ординалу α можно примитивно-рекурсивно построить формулу C, такую, что

$$C \leftrightarrows A \circledast B \quad .$$

<u>Доказательство</u>. Сначала добьёмся, чтобы всякая подформула формулы B была осмыслена. Для этого применим теорему отделимости к формуле B. В её доказательстве строилась такая предварённая формула, в которой всякая подформула осмыслена, если исходная формула принадлежит $\bigcup_{\alpha} \Sigma^{0}_{\alpha} \cup \Pi^{0}_{\alpha}$. Поскольку B осмыслена, то теорема отделимости приводит к равнозначной B формуле.

Утверждение теоремы распадается на две части, которые придётся доказывать различными методами.

<u>Лемма 3.3.5</u>. Если $B \in \Sigma^{\Delta}_{n}$ / $B \in \Pi^{\Delta}_{n}$ / и $n \geq 1$,

$$\models B \supset B ,$$

то, можно построить формулу C, такую, что $C \in \Sigma^{\Delta}_{n}$ $(C \in \Pi^{\Delta}_{n})$ и

$$C \leftrightarrows (A \circledast B) \quad .$$

<u>Доказательство</u>. Индукция по n. Для $n = 1$ лемма уже доказана. Пусть $B \in \Pi^{\Delta}_{n+1}$. Тогда

$$\models B \Leftrightarrow \dot{\forall} x \models S'(B, 0, x)$$

Все формулы $S'(B, 0, x) \in \Sigma^{\Delta}_{n}$. Следовательно, по предположению индукции, для них мы можем примитивно-рекурсивно построить C_x, такие, что $C_x \in \Sigma^{\Delta}_{n}$ и

$$C_x \leftrightarrows A \circledast S'(B,0,x).$$

Пусть $f(x,y)$ вычисляет $C_x(B,0,x)$. Пусть

$$g(x) \rightleftharpoons \begin{cases} \ulcorner 0 \in (0=0) \urcorner, y & , x = 0 \\ x \dot{-} 1 & , \text{иначе}. \end{cases}$$

Тогда положим

$$C \rightleftharpoons \forall x \forall y (0 \in g(f(x,y))).$$

При каждом x

$$\forall y (0 \in g(f(x,y))) \leftrightarrows C_x \leftrightarrows A \circledast S'(B,0,x).$$

Так как

$$\forall x (A \circledast B(x)) \leftrightarrows A \circledast \forall x B(x),$$

то всё очевидно.

Случай Σ^{Δ}_{n+1} разбирается двойственно.

<u>Лемма 3.3.6.</u> Если $B \in \Sigma^{\Delta}_{\alpha}$ /$B \in \Pi^{\Delta}_{\alpha}$/ и $\alpha \geq \omega$, и

$$\models B \supset B$$

то по B и A можно примитивно-рекурсивно построить C, такую, что $C \in \Sigma^{\Delta}_{\alpha}$/ $C \in \Pi^{\Delta}_{\alpha}$/ и

$$C \leftrightarrows A \circledast B.$$

<u>Доказательство</u>.

С помощью теоремы о неподвижной точке Клини построим ПРФ R, N.

Пусть φ - пятиместная ПРФ.

$$R_\varphi(A,B,k):$$

1. B - элементарна. $R_\varphi(A,B,k) \rightleftharpoons \S(A,B,k)$.

2. B - неэлементарна.

$$R_\varphi(A,B,0) \rightleftharpoons \ulcorner 0 y \forall x \forall y (0 \in \varphi(A,B,0,x,y)) \urcorner,$$

$$R_\varphi(A,B,1) \rightleftharpoons \ulcorner 0 y \exists x \exists y (0 \in \varphi(A,B,1,x,y)) \urcorner.$$

Пусть ПРФ $\tilde{g}(B,k,x,y)$ вычисляет $S'(B,k,x)$. Пусть

$$N_\varphi(A,B,0,m,y) \rightleftharpoons \ulcorner qx(0=0)\urcorner, \quad \tilde{g}(B,0,m,y) = 0 .$$
$$N_\varphi(A,B,0,m,y) \rightleftharpoons \ulcorner qx(0 \in R_\varphi(A,y \dot{-} 1,1))\urcorner, \quad \tilde{g}(B,0,m,y) \neq 0 .$$
$$N_\varphi(A,B,1,m,y) \rightleftharpoons \ulcorner qx(0=1)\urcorner, \quad \tilde{g}(B,1,m,y) = 0 .$$
$$N_\varphi(A,B,1,m,y) \rightleftharpoons \ulcorner qx(0 \in R_\varphi(A,y \dot{-} 1,1))\urcorner, \quad \tilde{g}(B,1,m,y) \neq 0 .$$

Подберём φ^* так, что

$$\varphi^*(A,B,k,m,n) \simeq N_{\varphi^*}(A,B,k,m,n) .$$

Обозначим $\quad N \rightleftharpoons N_{\varphi^*}, \quad R \rightleftharpoons R_{\varphi^*} .$

Определим

$$C \rightleftharpoons (0 \in R(A,B,0)), \quad B \in \Pi^\Delta_\alpha ;$$
$$C \rightleftharpoons (0 \in R(A,B,1)), \quad B \in \Sigma^\Delta_\alpha .$$

Доказательство того, что

$$C \leftrightarrows A \circledS B$$

тривиально. Индукцией по α легко доказать, что, если B принадлежит Π^Δ_n, то $C \in \Pi^\Delta_{n+3}$, если $B \in \Sigma^\Delta_n$, то $C \in \Sigma^\Delta_{n+3}$, если $B \in \Pi^\Delta_\alpha$ и $\alpha \geq \omega$, то и $C \in \Pi^\Delta_\alpha$; если $B \in \Sigma^\Delta_\alpha$ и $\alpha \geq \omega$, то и $C \in \Sigma^\Delta_\alpha$.

Доказательство леммы закончено.

Теперь можно доказать теорему 3.3. Сначала по B построим формулу B', которая даётся теоремой отделимости, а затем применим подходящую лемму, в зависимости от $\mathcal{L}$.

Обобщённая теорема спаривания доказана. Эта теорема вместе с теоремой отделимости устанавливает среди формул языка Δ иерархию, напоминающую иерархию Клини-Мостовского арифметических формул. Возникает вопрос о соотношении этой иерархии и известных иерархий. Естественно, что такой вопрос можно задавать лишь для всегда осмысленных предикаторов.

§ 3.4. Иерархия Клини, иерархия разветвлённого анализа и язык Δ.

Клини ([11]) ввёл иерархий степеней неразрешимости гиперарифметических множеств следующим образом. Сопоставим каждому клиниевскому ординалу α гиперарифметическое множество $\mathcal{H}_\alpha$:

Пусть $j(A) \rightleftharpoons \{x \mid \exists z\, T_1^A(x,x,z)\}$.

Тогда

1/ $\mathcal{H}_0 \rightleftharpoons \emptyset$,

2/ $\mathcal{H}_{\alpha \oplus 1} \rightleftharpoons j(\mathcal{H}_\alpha)$,

3/ $\mathcal{H}_{3.5^e} \rightleftharpoons \{[x,y] \mid x \in \mathcal{H}_{\langle e \rangle (y)}\}$.

<u>Лемма 3.4.I</u>. Если $M \in \Sigma^{\Delta}_{\alpha}$ и

$$\vDash \forall x(x \in M \supset x \in M),$$

то множество $\{n \mid \vDash n \in M\}$ перечислимо относительно $\mathcal{H}_\alpha$.

<u>Доказательство</u>. Очевидно из S-индукции.

Для доказательства обратной леммы нам будет гораздо удобнее воспользоваться аппаратом разветвлённого анализа ([1]).

<u>Определение 3.4</u>. Язык разветвлённого анализа уровня ω_1.

Переменные - фигуры вида $(H\alpha)$, $(HH\alpha)$, ... , где $\alpha \in \mathcal{O}$. Мы будем их обозначать $x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha$....

Термы - определяются так же, как и в языке Δ, но переменные могут быть лишь вида $(H \dots H\, 0)$.

Переменные x^0, y^0, z^0... мы в дальнейшем будем называть арифметическими переменными, переменные вида x^α, y^α, z^α... - переменными α- того слоя.

<u>Формулы</u>.

1. Если t и u - термы, то $(t=u)$ - формула.
2. Если A и B - формулы, то $(A \supset B)$ - формула.
3. Если A - формула, x^α - переменная, то $\forall x^\alpha A$ - формула.

4. Если t - терм, X^α - переменная, $\alpha \neq 0$, то $t(X^\alpha)$ - формула.

5. Если t - терм, X^0 - арифметическая переменная, A - формула, то $(t \in 9X^0 A)$ - формула.

Фигура вида $9X^0 A$ называется <u>множеством</u> слоя α, если все переменные Y^β, входящие в A, таковы, что $\beta \ll \alpha$.

Обычным способом можно определить параметры, свободные и связанные вхождения переменных в формулу, множество, терм и т.д. Соглашение о том, что все упоминаемые в тексте объекты являются замкнутыми, если явно не оговорено противное, остаётся в силе.

<u>Определение 3.4.I.</u> Семантика языка разветвлённого анализа.

Формула $(t=u)$ истинная тогда и только тогда, когда значения термов равны.

Формула $(A \supset B)$ истинна тогда и только тогда, когда из "истинно A" следует "истинно B".

Формула $\forall X^0 A$ истинна тогда и только тогда, когда при всех n истинно $A(X^0/n)$.

Формула $\forall X^\alpha A$ / $\alpha \neq 0$ / истинна тогда и только тогда, когда для всех множеств $9Y^0 B$ слоя α истинна $(X^\alpha | 9Y^0 B)$.

Формула $(t \in 9X^0 A)$ истинна тогда и только тогда, когда истинна $A(X^0|t)$.

Формула A ложна тогда и только тогда, когда A не истинна.

Обычным образом вводим сокращения $\&$, $\vee$, $\exists$, $\neg$.

<u>Лемма 3.4.2.</u> Каждая замкнутая формула может быть приведена к предварённой нормальной форме следующего вида:

$$\forall X^\alpha \exists Y^\beta \ldots B$$

или

$$\exists X^\alpha \forall Y^\beta \ldots B$$, где B не содержит кванторов и подформул вида $(t \in 9X^0 C)$, в префиксе кванторы $\forall$ и $\exists$ чередуются, и для любых двух рядом стоящих кванторов $\forall X^\alpha \exists Y^\beta$

или $\exists X^{\alpha} \forall Y^{\beta}$ имеем $\alpha \,\underset{\cdot}{=}\, \beta$ или $\beta \ll \alpha$.

<u>Доказательство</u>. Этот результат широко известен и даже в более сильных формах. Здесь нам достаточно этой формы. Доказательство см., например, в [12] или [13].

Формула $A \in \Sigma_{\alpha, n}$, если A в предварённой нормальной форме имеет вид

$$\exists X^{\alpha} \ldots \quad B \quad ,$$

и содержит $n+1$ кванторов по слою α.

Формула $A \in \Pi_{\alpha, n}$, если A в предварённой нормальной форме имеет вид

$$\forall X^{\alpha} \ldots \quad B \quad ,$$

и содержит $n+1$ кванторов по слою α.

Множество $\daleth X^0 A \in \Pi_{\alpha, n}$ / $\daleth X^0 A \in \Sigma_{\alpha, n}$ / если $A \in \Pi_{\alpha, n}$ / $A \in \Sigma_{\alpha, n}$ /.

<u>Лемма 3.4.3</u>. Для каждого множества $\daleth X^0 A$ класса $\Sigma_{\alpha, n}$ / $\Pi_{\alpha, n}$ / существует предварённый предикатор M класса $\Sigma^{\Delta}_{\omega_\alpha \oplus n}$ / $\Pi^{\Delta}_{\omega_\alpha \oplus n}$ /, такой, что $\models \forall x (x \in M \supset x \in M)$ и

$$\models (n \in M) \Longleftrightarrow \text{истинно } (n \in \daleth X^0 A) \quad .$$

<u>Доказательство</u>. Для множеств класса $\Sigma_{0, n}$ / $\Pi_{0, n}$ / доказательство тривиально: достаточно привести A к предварённой форме и стереть слой 0 в переменных.

Далее действуем трансфинитной индукцией. Пусть для каждого множества слоя α мы умеем примитивно-рекурсивно строить M, такое, что M удовлетворяет условиям леммы.

Пусть $\daleth X^0 A$ - множество слоя $\alpha \oplus 1$. Приведём A к предварённой форме. Она имеет вид

$$\underbrace{Q_1 X_1^{\alpha} \ldots Q_n X_n^{\alpha}}_{n \text{ кванторов по слою } \alpha} \underbrace{Q_{n+1} X_{n+1}^{\beta} \ldots}_{\text{кванторы по низшим слоям}} B$$

Если подставить вместо $X_1^{\alpha}, X_2^{\alpha}, X_3^{\alpha} \ldots X_n^{\alpha}$ в формулу

$Q_{n+1}X_{n+1}^{\beta}$ — B какие-либо множества слоя α , у нас получится формула, говорящая лишь о слоях $\lll\alpha$, а каждую такую формулу мы уже умеем преобразовывать в формулу языка Δ . Таким образом, у нас имеется ОРФ , преобразующая каждую формулу слоя $\alpha \oplus 1$ в формулу языка Δ . Теперь достаточно с помощью техники вычисляющих функций, не раз уже применявшейся, преобразовать эту ОРФ в ПРФ.

<u>Лемма 3.4.4.</u> Для каждого предикатора M из класса $\Pi^{\Delta}_{\omega_\alpha \oplus n}$ / $\Sigma^{\Delta}_{\omega_\alpha \oplus n}$ / такого, что $\models \forall x(x \in M \supset x \in M)$, существует множество $q X^0 A$ класса $\Pi_{\alpha, n}$ / $\Sigma_{\alpha, n}$ /, такое, что

$$\models n \in M \Longleftrightarrow \text{истинно } (n \in q X^0 A) .$$

<u>Доказательство</u>. Всякое множество, перечислимое относительно $H_{\omega_\alpha \oplus n}$, выразимо множеством класса $\Sigma_{\alpha, n}$ / см. [12] /. Из этого утверждения и леммы 3.4.I немедленно следует лемма 3.4.4.

Таким образом, устанавливается взаимно-однозначная связь между иерархией степеней неразрешимости Клини, иерархией разветвлённого анализа и иерархией по числу перемен кванторов для всюду осмысленных предикаторов языка Δ . Язык Δ , базирующийся на нестандартной логике, оказывается тем не менее в той своей части, которая сохраняет стандартную логику, устроенным подобно обычным языкам. Однако сильная сторона языка Δ в том, что все теоремы об иерархии для языка Δ безо всяких изменений переносятся на случай абстрактной вычислимости.

В самом деле, рассмотрим абстрактную вычислимость по Московакису / [14] /. В языке Δ внесём следующие изменения в определение терма:

I. Переменная есть терм.

2. Если $a \in B^*$, то a - терм.

3. Если $a \in B^*$, k - натуральное число, $t_1, \ldots, t_k$ - термы, то $\langle a, k \rangle (t_1, \ldots, t_k)$ - терм.

При определении значения $\langle a, k \rangle$ интерпретируется как k-местная первично вычислимая функция с кодом a, если таковая имеется, и 0^k - иначе. Все определения и теоремы практически без изменений переносятся на случай абстрактной вычислимости на любой структуре. Достаточно лишь потребовать, чтобы исходные функции были однозначны и всюду определены. Таким образом, получается вторая характеризация гиперпроективных множеств /[14], [15] /, не использующая "игрового квантора" Московакиса/ [15] /.

ЧАСТЬ 4.

В этой части раасматривается язык $\mathcal{SL}$, основанный на конструктивной логике. Ввиду предварительного характера приведённых в этой части теорем, лишь иллюстрирующих связь между собой некоторых определений, доказательства в основном опускаются.

§ 4.I. СИНТАКСИС ЯЗЫКА $\mathcal{SL}$. РЕАЛИЗУЕМОСТЬ.

Знаки языка $\mathcal{SL}$ - знаки языка Δ и символы $\&$, $\vee$, $\exists$.

К порождающим правилам языка Δ для формул добавляются следующие:

I. Если A и B - формулы, то $(A \& B)$ - формула.

2. Если A и B - формулы, то $(A \vee B)$ - формула.

3. Если A - формула, X - переменная, то $\exists X A$ - формула.

Одновременным определением на трансфинитной рекурсии определим понятия " n реализует формулу A на уровне α ", " n виртуально реализует формулу A на уровне α ". Как и раньше, эти понятия будут обозначаться $n[R]_\alpha A$ и $n[CR]_\alpha A$ соответственно.

I. $n[R]_\alpha (t=u) \Leftrightarrow n[CR]_\alpha (t=u) \Leftrightarrow \mathfrak{z}_L t_J \dot{=} \mathfrak{z}_L u_J$.

Ia. $n[CR]_0 A$. A - неэлементарная.

2. $n[R]_{\alpha \oplus 1} (A \supset B) \Leftrightarrow \dot{\forall} x (x [CR]_\alpha A \Rightarrow\ !\langle n \rangle (x)\ \dot{\&}\ \langle n \rangle (x) [R]_\alpha B)$.

2a. $n[CR]_{\alpha \oplus 1} (A \supset B) \Leftrightarrow \dot{\forall} x (x [R]_\alpha A \Rightarrow\ !\langle n \rangle (x)\ \dot{\&}\ \langle n \rangle (x) [CR]_\alpha B)$.

3. $n[R]_{\alpha \oplus 1} (A \& B) \Leftrightarrow (n)_1 [CR]_\alpha A\ \dot{\&}\ (n)_2 [CR]_\alpha B$.

3a. $n[CR]_{\alpha \oplus 1} (A \& B) \Leftrightarrow (n)_1 [CR]_\alpha A\ \dot{\&}\ (n)_2 [CR]_\alpha B$.

4. $n[R]_{\alpha \oplus 1} (A \vee B) \Leftrightarrow ((n)_1 \dot{=} 0\ \dot{\&}\ (n)_2 [CR]_\alpha A)\ \dot{\vee}\ ((n)_1 \dot{=} 1\ \dot{\&}\ (n)_2 [R]_\alpha B)$

4a. $n[CR]_{\alpha\oplus 1}(A\vee B)\Leftrightarrow((n)_1\dot{=}0\ \dot{\&}\ (n)_2[CR]_\alpha A)\ \dot{\vee}$ $((n)_1\dot{=}1\ \&\ (n)_2[CR]_\alpha B)$

5. $n[R]_{\alpha\oplus 1}\forall XA\Leftrightarrow\dot{\forall}m(!\langle n\rangle(m)\ \dot{\&}\ \langle n\rangle(m)[R]_\alpha A(X|m))$.

5a. $n[CR]_{\alpha\oplus 1}\forall XA\Leftrightarrow\dot{\forall}m(!\langle n\rangle(m)\ \&\langle n\rangle(m)[CR]_\alpha A(X|m))$.

6. $n[R]_{\alpha\oplus 1}\exists XA\Leftrightarrow(n)_1[R]_\alpha A(X|(n)_2)$

6a. $n[CR]_{\alpha\oplus 1}\exists XA\Leftrightarrow(n)_1[CR]_\alpha A(X|$

7. $n[R]_{\alpha\oplus 1}(t\in Q)\Leftrightarrow f_n^1(0)[R]_\alpha\ \ulcorner(t\in Q)\urcorner$

7a. $n[CR]_{\alpha\oplus 1}(t\in Q)\Leftrightarrow f_n^1(0)[CR]_\alpha\ \ulcorner(t\in Q)\urcorner$

8. $n[R]_\lambda A\Leftrightarrow\dot{\exists}_{\beta<\lambda}\ n[R]_\beta A$ $\quad\lambda$ - предельный

8a. $n[CR]_\lambda A\Leftrightarrow\dot{\forall}_{\beta<\lambda}\ n[CR]_\beta A$ $\quad\lambda$ - предельный

<u>Лемма 4.I.I</u>. Если $n[R]_\alpha A$ и $\alpha<\beta$, то $n[R]_\beta A$. Если $n[CR]_\beta A$ и $\alpha<\beta$, то $n[CR]_\beta A$.

Лемма доказывается индукцией по α,β. Доказательство её совершенно аналогично доказательству леммы 2.I.2.

<u>Лемма 4.I.2</u>. Если $n[R]_\alpha A$, то $\dot{\forall}_\beta\ n[CR]_\beta A$. Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 2.I.I.

Так же, как и раньше, введём сокращение $\neg A$. Формулу языка Ω A будем называть <u>истинной</u>, если

$$\dot{\exists}n\ \dot{\exists}\alpha\ n[R]_\alpha A\ .$$

Формулу языка Ω A будем называть <u>ложной</u>, если

$$\dot{\exists}n\ \dot{\exists}\alpha\ n[R]_\alpha\neg A\ .$$

Эти факты мы будем обозначать $\models_\Omega A$ и $=\!\mid_\Omega A$, соответственно.

Определим по теореме о неподвижной точке Клини ПРФ $NORM$, перерабатывающую формулы языка Ω в формулы языка Δ.

$NORM\ulcorner(t=u)\urcorner\rightleftharpoons(t=u)$.

$NORM\ulcorner(A\supset B)\urcorner\rightleftharpoons(NORM\ulcorner A\urcorner\supset NORM\ulcorner B\urcorner)$.

$$NORM_{\llcorner}(A\&B)_{\lrcorner} \rightleftharpoons \neg(NORM_{\llcorner}A_{\lrcorner} \supset \neg NORM_{\llcorner}B_{\lrcorner})$$

$$NORM_{\llcorner}(A\vee B)_{\lrcorner} \rightleftharpoons (\neg NORM_{\llcorner}A_{\lrcorner} \supset NORM_{\llcorner}B_{\lrcorner}) .$$

$$NORM_{\llcorner}\forall XA_{\lrcorner} \rightleftharpoons \forall X\, NORM_{\llcorner}A_{\lrcorner} .$$

$$NORM_{\llcorner}\exists XA_{\lrcorner} \rightleftharpoons \neg\forall X \neg NORM_{\llcorner}A_{\lrcorner} .$$

$$NORM_{\llcorner}(t\in qXA)_{\lrcorner} \rightleftharpoons (t\in qX\, NORM_{\llcorner}A_{\lrcorner}) .$$

$$NORM_{\llcorner}(t\in u)_{\lrcorner} \rightleftharpoons (t\in k\, NORM_{\llcorner}\alpha_{\llcorner}\xi_{\llcorner}u_{\lrcorner}{}_{\lrcorner}{}_{\lrcorner}) .$$

Эта ПРФ сопоставляет каждой формуле языка Ω её "гёделеву интерпретацию" в языке Δ.

Определим понятие <u>подформулы</u> формулы языка Ω.

1. Подформулой формулы вида $(t=u)$ является лишь она сама.

2. Подформулами формулы $(A\,p\,B)$, где p есть $\supset$, $\&$ или $\vee$, являются подформулы A и B и сама формула $(A\,p\,B)$.

3. Подформулами формулы κXA, где κ есть $\forall$ или $\exists$, является она сама и все подформулы формул $A(X|n)$.

4. Подформулами формулы $(t\in Q)$ являются она сама и все подформулы формулы $\rho_{\llcorner}(t\in Q)_{\lrcorner}$.

Формула C называется <u>нормальной</u>, если она не имеет подформул вида $(A\vee B)$ или $\exists XA$.

<u>Лемма 4.I.3.</u> Если формула A нормальна, то

$$\models_{\Omega} A \Longleftrightarrow\ \models NORM_{\llcorner}A_{\lrcorner} ,$$

$$=\!\mid_{\Omega} A \Longleftrightarrow\ =\!\mid NORM_{\llcorner}A_{\lrcorner} .$$

<u>Доказательство</u>. Тривиально.

Таким образом, семантика языка Ω согласована с семантикой языка Δ. Но, ввиду наличия связок $\vee$ и $\exists$ в языке Ω начинают существенно сказываться специфически конструктивные эффекты. В частности, вся обычная конструктивная арифметика вкладывается в эту теорию. Следовательно, логика языка Ω существенно неклассическая. В совокупности с эффектами,порождаемыми существованием бессмыслиц,это даёт ещё большую неполноту логики.

<u>Пример</u>. Рассмотрим формулу

$$(\urcorner\in\urcorner) \supset \exists x \neg(u(y,x)=0) \vee \forall x\, u(y,x)=0 ,$$

где $\urcorner \doteqdot \{\iota x(x\in x)\}$, а $u(y,x)$ - ПРФ,вычисляющая ЧРФ $\lambda x\{x\}(x)$.

$$\{\lambda x\, 0\}\, [R]_8 \, \forall y \neg\neg A ,$$

но ни при каком α никакое x не реализует

$$\forall y (A \supset A) .$$

То,что $\{\lambda x\, 0\}[R]_8 \forall_y \neg\neg A$, очевидно из определения.

Пусть $n[R]_{\alpha\oplus 6} \forall y(A\supset A)$. Тогда при всех m

$$\langle n\rangle(m)[R]_{\alpha\oplus 5}(A(y|m)\supset A(y|m)) , и$$

$$\dot\forall m \dot\forall k\; k[CR]_{\alpha\oplus 4} A(y|m) \Rightarrow \langle\langle n\rangle(m)\rangle(k)[R]_{\alpha\oplus 4} A(y|m)$$

Но,поскольку $\dot\forall\alpha\, \dot\forall n\;\; n[CR]_\alpha(\urcorner\in\urcorner)$,

$$\dot\forall m\, \dot\forall k\, \dot\forall l\; !\langle\langle\langle n\rangle(m)\rangle(k)\rangle(l)\, \&\, \langle\langle\langle n\rangle(m)\rangle(k)\rangle(l)\; [R]_{\alpha\oplus 3}$$

$$(\exists x(\neg u(m,x)=0) \vee \forall x(u(m,x)=0)) .$$

Следовательно,поскольку $\dot\forall\alpha\, \dot\forall n \sim n[R]_\alpha(\urcorner\in\urcorner)$ и

$$\dot\forall m\, \dot\forall\alpha\, \dot\forall n \;\; n[CR]_\alpha A(y|m) ,$$

функция $\{\{n\}(m)\}(0)$ решает проблему применимости для универсальной ЧРФ,чего не может быть.

§ 4.2. Алгорифм выявления конструктивной расшифровки.

Будем обозначать через $(t \overset{+}{\in} u)$ формулу $(t\in NORM\llcorner u\lrcorner)$. Формула A называется строго нормальной,если A не содержит символов $\vee$ и $\exists$ и все явно выписанные подформулы A вида $(t\in u)$ имеют вид $(t \overset{+}{\in} u_1)$. Формула называется <u>регулярной</u>, если она имеет вид $\exists XA$, где A - строго нормальная формула.

Теперь мы определим алгорифм конструктивной расшифровки

$\text{Ш}\llcorner A\lrcorner$. D и $\mathcal{E}$ всюду в определении будут обозначать нормальные формулы.

Пусть $u(X,Y,Z)$ - ПРФ, вычисляющая универсальную ЧРФ

<u>Определение 4.2.</u>

1. $\text{Ш}\llcorner D\lrcorner \rightleftharpoons \exists X D$, X - кратчайшая переменная, не входящая свободно в D.

2. $\text{Ш}\llcorner \exists X D\lrcorner \rightleftharpoons \exists X D$.

3. $\text{Ш}\llcorner \exists X \exists Y D\lrcorner \rightleftharpoons \exists X\, D(X|(X)_1, Y|(X)_2)$.

4. $\text{Ш}\llcorner \forall X \exists Y D\lrcorner \rightleftharpoons \exists X \forall Y \forall Z(\neg\forall U \neg\forall Z \neg u(X,Y,U)=Z+1\ \&$ $u(X,Y,U)=Z+1 \supset D(X|Y, Y|Z))$, U, Z - кратчайшие переменные, отличные друг от друга и не входящие свободно в D. $U, Z \neq X, Y$.

5. $\text{Ш}\llcorner \exists X D \supset \exists Y \mathcal{E}\lrcorner \rightleftharpoons \exists X \forall Y \forall Z \forall U (D(X|Y) \supset$ $\forall U \neg\forall Z \neg u(X,Y,U)=Z+1\ \&\ u(X,Y,U)=Z+1 \supset \mathcal{E}(Y|Z))$, U, Z - кратчайшие переменные, отличные друг от друга и не входящие свободно в D и $\mathcal{E}$. $U, Z \neq X, Y$.

6. $\text{Ш}\llcorner \exists X D\ \&\ \exists Y \mathcal{E}\lrcorner \rightleftharpoons \exists X(D(X|(X)_1)\ \&\ \mathcal{E}(X|(X)_2))$.

7. $\text{Ш}\llcorner \exists X D \vee \exists Y \mathcal{E}\lrcorner \rightleftharpoons \exists X(((X)_1=0 \supset D(X|(X)_2))\ \&\ ((X)_1\neq 0 \supset \mathcal{E}(Y|(X)_2)))$.

8. $\text{Ш}\llcorner A \supset B\lrcorner \rightleftharpoons \text{Ш}\llcorner \text{Ш}\llcorner A\lrcorner \supset \text{Ш}\llcorner B\lrcorner\lrcorner$.

9. $\text{Ш}\llcorner A\ \&\ B\lrcorner \rightleftharpoons \text{Ш}\llcorner \text{Ш}\llcorner A\lrcorner\ \&\ \text{Ш}\llcorner B\lrcorner\lrcorner$.

10. $\text{Ш}\llcorner A \vee B\lrcorner \rightleftharpoons \text{Ш}\llcorner \text{Ш}\llcorner A\lrcorner \vee \text{Ш}\llcorner B\lrcorner\lrcorner$.

11. $\text{Ш}\llcorner \forall X A\lrcorner \rightleftharpoons \text{Ш}\llcorner \forall X\, \text{Ш}\llcorner A\lrcorner\lrcorner$.

12. $\text{Ш}\llcorner \exists X A\lrcorner \rightleftharpoons \text{Ш}\llcorner \exists X\, \text{Ш}\llcorner A\lrcorner\lrcorner$.

13. $\text{Ш}\llcorner (t \in \{X A\})\lrcorner \rightleftharpoons \text{Ш}\llcorner A(X|t)\lrcorner$.

14. $\text{Ш}\llcorner (t \in u)\lrcorner \rightleftharpoons \exists X(t \in R(\text{Ш}\llcorner \ulcorner u \urcorner\lrcorner, X))$.

В этом определении последующие пункты применяются лишь при невозможности применить предыдущие.

Теорема 4.2.

$$\models_{\mathfrak{R}} \mathfrak{W}\llcorner A \lrcorner \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{R}} A \quad ,$$

$$\dashv_{\mathfrak{R}} \mathfrak{W}\llcorner A \lrcorner \Leftrightarrow \dashv_{\mathfrak{R}} A \quad .$$

Доказательство. Если A – нормальна или регулярна, доказатель-ство тривиально. В более общем случае достаточно заметить, что все пункты определения алгорифма конструктивной расшифровки копируют пункты определения реализуемости, поэтому индукцией по α легко доказать, что следующий алгорифм $\mathcal{X}\llcorner A, n \lrcorner$ преобразует всякое такое n, что $\mathfrak{W}\llcorner A \lrcorner \rightleftharpoons \exists X B$ и $\models_{\mathfrak{R}} B(X|n)$, в такое $\mathcal{X}(n)$, что на некотором уровне β $\mathcal{X}(n) [CR]_{\beta} A$, а такое n, что $B(X|n)$ не является ложным, в такое $\mathcal{X}(n)$, что $\forall \beta\, \mathcal{X}(n) [CR]_{\beta} A$.

1. $\mathcal{X}\llcorner (t=u), n \lrcorner \rightleftharpoons 0$
2. $\mathcal{X}\llcorner (A \supset B), n \lrcorner \rightleftharpoons \llbracket \lambda x\ \mathcal{X}\llcorner B, \{n\}(x) \lrcorner \rrbracket$.
3. $\mathcal{X}\llcorner (A \& B), n \lrcorner \rightleftharpoons [\mathcal{X}\llcorner A, (n)_1 \lrcorner, \mathcal{X}\llcorner B, (n)_2 \lrcorner]$.
4. $\mathcal{X}\llcorner A \vee B, n \lrcorner \rightleftharpoons \overline{sg}((n)_1) \cdot \mathcal{X}\llcorner A, (n)_2 \lrcorner + sg((n)_1) \cdot \mathcal{X}\llcorner B, (n)_2 \lrcorner$.
5. $\mathcal{X}\llcorner \forall X A, n \lrcorner \rightleftharpoons \llbracket \lambda m\ \mathcal{X}\llcorner A(X|m), \{n\}(m) \lrcorner \rrbracket$.
6. $\mathcal{X}\llcorner \exists X A, n \lrcorner \rightleftharpoons \llbracket \mathcal{X}\llcorner A(X|(n)_1), (n)_2 \lrcorner \rrbracket$.
7. $\mathcal{X}\llcorner (t \in Q), n \lrcorner \rightleftharpoons \llbracket \lambda x . \mathcal{X}\llcorner P\llcorner (t \in Q) \lrcorner, n \lrcorner \rrbracket$.

И обратно, каждое такое n, что $\models_{\mathfrak{R}} B(X|n)$, может быть преобразовано в такое k, что $k [CR]_{\alpha} A$.

Доказательство завершено.

Определение алгорифма конструктивной расшифровки удобно тем, что оно позволяет сделать следующий шаг: алгорифм перерабатывает каждую формулу в регулярную формулу $\exists X C$. Применим алгорифм NORM, и преобразуем C в формулу языка $\triangle$. Для формул языка $\triangle$ у нас есть полуформальная система ПВ, которая адекватно отражает понятие истины. Рассмотрим следующую полуформальную систему. Она содержит все аксиомы и правила вывода системы ПВ и ещё одно правило:

$$\frac{\to NORM_{L} C(X|n)_{J} \quad (Ш_{L} A_{J} \doteqdot \exists X C)}{A}$$

Формула A истинна тогда и только тогда, когда она выводима в этой полуформальной системе.

Ещё одно приложение языка Δ к языку Ω состоит в том, что сведение формул языка Δ по истинности к формулам языка Π даёт нам возможность свести по истинности при помощи алгорифма конструктивной расшифровки формулы языка Ω к формулам следующего вида:

$\exists X$ (формула языка Π).

Таким образом, по истинности и формулы языка Ω сводимы к формулам очень простого языка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автор пользуется случаем выразить свою благодарность своим научным руководителям А.Г.Драгалину и А.А.Маркову. А.Г.Драгалин руководил работой автора с самого начала, рекомендовал литературу, которая дала толчок к дальнейшим исследованиям, обсуждал полученные результаты и методы, использованные при их доказательстве.

А.А.Марков своей требовательностью к формулировкам основных понятий побуждал автора к усовершенствованию главных определений. Из изучения его работ и идей, навеянных его спецкурсом, возникла задача сведения языка Δ к языку Π .

Автор выражает благодарность семинару по конструктивной математике ВЦ АН СССР и семинару по конструктивной математике ЛОМИ за обсуждение его работ. Автор должен также поблагодарить А.С.Кузичева, А.А.Мучника и В.А.Успенского за ценные замечания и обсуждение полученных результатов.

S. Feferman. Systhems of predicative analysis. J. of symb. Log. v. 40, n. 1-2.

K. Schütte. Beweistheorie. Berlin, Springer, 1960

БОЧВАР Д.А. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления. Матем.сб.,4 (46), стр.287-308.

P. Lorenzen. Einführung in die operative Logik und Mathematik. Springer, 1955

Марков А.А. Essai de construction d'une logique de la mathématique constructive. Revue intern. de Phil., 1971, № 98

ШАНИН Н.А. О конструктивном понимании математических суждений. Тр. МИАН СССР, 52.

7. Феферман С. Трансфинитные рекурсивные прогрессии математических теорий. Математика, 1971, т. 15, № 5, стр. 84-139

РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., Мир, 1972

Kreisel, Troelstra. Formal systhems for some branches of intuitionistic mathematics. Ann. Math. Log., 1970, 1, №3.

0. S. C. Kleene. On notations for ordinal numbers, J. Symb. Log., 3, p. 150-155

1. S. C. Kleene. Hierarchies of number theoretic predicates. Bull. Amer. Math. Soc. 61, p. 193-213

12. R. Boyd, G. Hensel, H. Putnam. A recursion-theoretic characterisation of the ramified analytical hierarchy. Tr. Am. Math. Soc. 1969, v. 141, p. 37-62.

13. S. C. Kleene. Quantification of number-theoretic predicates. Comp. Math. 14 (1959), p. 23-40

14. Y.M. Moscovakis. Abstract first order computability. I, II. Trans. Amer. Math. Soc., v. 138, p. 426-504

15. Y.M. Moscovakis. The game quantifier, Pr. Amer. Math. Soc., v. 31, N. 1.

16. Непейвода Н.Н. Предикативная и конструктивная истинность в наивном анализе. II Всес. Конф. по мат. лог., тезисы.

17. Непейвода Н.Н. Новое понятие предикативной истинности и определимости. Мат. заметки, 5, 1973, т. 13, стр. 735-746

18. Непейвода Н.Н. Предикативная осмысленность и разветвлённый анализ. ДАН

19. Непейвода Н.Н. Об одном обобщении иерархии Клини-Мостовского. ДАН.

ОГЛАВЛЕНИЕ